Exo IV Etude fonction et calcul d'aire | TS4 / C6 / 18.01.05 3/3

$$\boxed{f(x) = x + \ln 4 + \frac{2}{e^x+1}} \quad (x \in \mathbb{R})$$

1°) $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$ car $e^x \to +\infty$ et $\frac{2}{e^x+1} \to 0 \Rightarrow \lim\limits_{+\infty} f = \lim\limits_{+\infty}(x+\ln 4) = +\infty$

$\lim\limits_{-\infty} f = -\infty$ car $e^x \to 0$ et $\frac{2}{e^x+1} \to 2 \Rightarrow \lim\limits_{-\infty} f = \lim (x+\ln 4+2) = -\infty$

2°) $f(x)+f(-x) = 2\ln 4 + 2\left[\frac{1}{e^x+1}+\frac{1}{e^{-x}+1}\right] = 2\ln 4 + 2\left[\frac{e^{-x}+1+e^x+1}{(e^x+1)(e^{-x}+1)}\right]$

or $e^{+x}\cdot e^{-x} = e^0 = 1$ donc $(e^x+1)(e^{-x}+1) = e^x+e^{-x}+2$ et par suite

$f(x)+f(-x) = 2\ln 4 + 2\times 1 \iff \frac{f(x)+f(-x)}{2} = \boxed{1+\ln 4}$.

On en déduit que le point $A(0;1+\ln 4)$ est CENTRE de SYMÉTRIE de $\mathcal{C}$.

3°) $f'(x) = 1 + \frac{-2e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{(e^x+1)^2-2e^x}{(e^x+1)^2} = \boxed{\frac{e^{2x}+1}{(e^x+1)^2}} > 0$ sur $\mathbb{R}$.

Donc f strictement croissante sur $]-\infty;+\infty[$

4°) f CONTINUE et STRICTEMENT MONOTONE (croissante) sur $]-\infty;+\infty[$

a) définit une BIJECTION de $]-\infty;+\infty[$ sur $]-\infty;+\infty[$.

Par suite tout Nb Réel m admet un ANTÉCÉDENT unique sur $\mathbb{R}$.

i.e l'équation $f(x)=m$ admet une sol. unique.

b) $f(x)=3$ admet pour solution unique $\alpha \in]1{,}1;1{,}2[$

car $f(1{,}1) \simeq 2{,}98$ et $f(1{,}2) \simeq 3{,}09$.

c) Par symétrie / $A(0;1+\ln 4)$ on a $\frac{f(-\alpha)+f(\alpha)}{2} = 1+\ln 4$

donc $f(-\alpha) = 2+2\ln 4 - f(\alpha) = 2+2\ln 4 - 3 = 2\ln 4 - 1$

Ainsi $f(\alpha) = 3 \iff f(-\alpha) = 2\ln 4 - 1$ donc le nombre m cherché est $\boxed{2\ln 4 - 1}$.

$\iff m \simeq 1{,}7$

5°) $\lim\limits_{+\infty}[f(x)-(x+\ln 4)] = \lim\limits_{+\infty} \frac{2}{e^x+1} = 0^+ \iff (\Delta)\ y = x+\ln 4$ ASYMPTOTE à $\mathcal{C}$ en $\boxed{+\infty}$ (AU DESSUS)

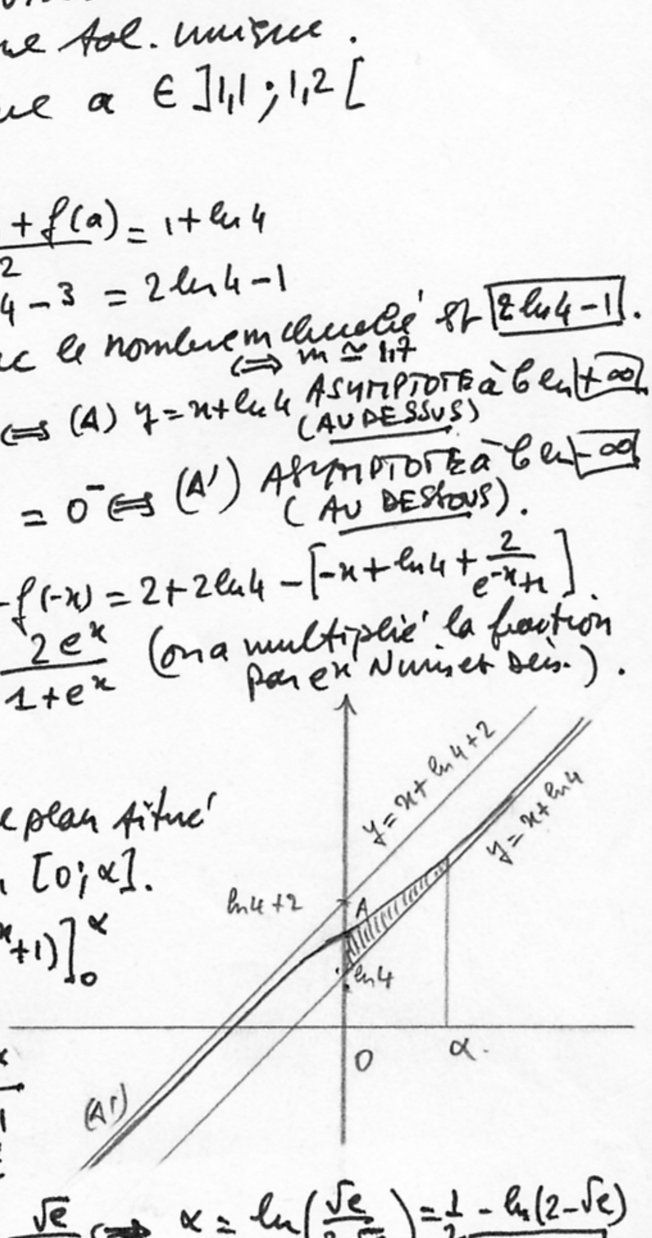
b) $\lim\limits_{-\infty}[f(x)-(x+2+\ln 4)] = \lim\limits_{-\infty}\left[-\frac{2e^x}{e^x+1}\right] = 0^- \iff (\Delta')$ ASYMPTOTE à $\mathcal{C}$ en $\boxed{-\infty}$ (AU DESSOUS).

• $f(x)+f(-x) = 2+2\ln 4 \iff f(x) = 2+2\ln 4 - f(-x) = 2+2\ln 4 - \left[-x+\ln 4+\frac{2}{e^{-x}+1}\right]$

d'où le résultat : $f(x) = x+\ln 4+2 - \frac{2e^x}{1+e^x}$ (on a multiplié la fraction par e^x Num et Dén.).

6°) $I(\alpha) = \int_0^\alpha [f(x)-(x+\ln 4)]\,dx$

a) Il représente une mesure en U.A. du domaine plan situé entre la courbe $\mathcal{C}$ et l'asymptote (Δ) sur $[0;\alpha]$.



b) $I(\alpha) = \int_0^\alpha \left(2-2\frac{e^x}{e^x+1}\right)dx = 2\left[x - \ln(e^x+1)\right]_0^\alpha$

Donc $I(\alpha) = 2\alpha - 2\ln(e^\alpha+1) + 2\ln 2$
$= 2\left[\ln e^\alpha + \ln 2 - \ln(e^\alpha+1)\right] = 2\ln\frac{2e^\alpha}{e^\alpha+1}$

c) $I(\alpha) = 1 \iff \ln\frac{2e^\alpha}{e^\alpha+1} = \frac{1}{2} = \ln e^{\frac{1}{2}} \iff \frac{2e^\alpha}{e^\alpha+1} = e^{\frac{1}{2}}$

$\iff 2e^\alpha = e^\alpha\sqrt{e}+\sqrt{e} \iff e^\alpha(2-\sqrt{e}) = \sqrt{e} \iff e^\alpha = \frac{\sqrt{e}}{2-\sqrt{e}} \iff \alpha = \ln\left(\frac{\sqrt{e}}{2-\sqrt{e}}\right) = \frac{1}{2} - \ln(2-\sqrt{e})$ $\boxed{\alpha \simeq 1{,}5}$