Exercice N°2 Résolution de l'équation | Term. S4 / C6 / 18.01.05

(E) $\boxed{x^y = y^x}$ $x>0$, $y>0$

2/3

1°) (E) $\iff \ln(x^y) = \ln(y^x) \iff y\ln x = x\ln y \iff \boxed{\frac{\ln x}{x} = \frac{\ln y}{y}}$.

2°) $h(x) = \frac{\ln x}{x}$ $\boxed{x>0}$.

a) on rappelle que $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0^+$ (la fonction puissance impose sa limite au logarithme dans le quotient.)

$\lim_{x\to0^+} h(x) = \lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}\right) \times \lim_{x\to0^+}(\ln x) = (+\infty)\times(-\infty) = \boxed{-\infty}$.

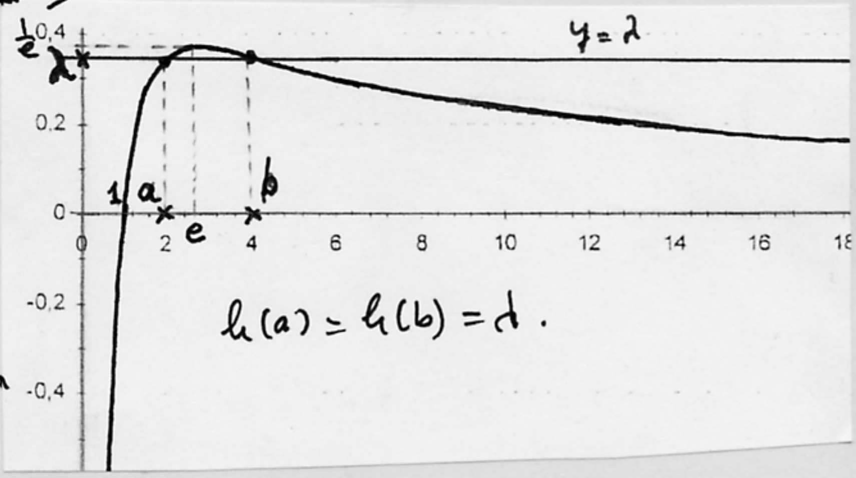
$\mathcal{C}$ admet donc 2 asymptotes : $y=0$ $(\vec{Ox})$ en $+\infty$ et $x=0$ $(\vec{Oy})$ en 0^+.

b) $h'(x) = \frac{\frac{1}{x}\times x - \ln x}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2}$ donc $\text{sgn}[h'(x)] = \text{sgn}[1-\ln x]$.

or $1-\ln x > 0 \iff \ln x < 1 \iff \ln x < \ln e \iff \boxed{x<e}$ car $\ln \nearrow$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

D'où le tableau de variation

x	0	1	e	$+\infty$
$h'(x)$		+	0	−
h	$-\infty$ ↗	0 ↗	M	↘ 0^+



$x_0 = e$ abscisse du maximum

$M = h(x_0) = h(e) = \frac{\ln e}{e} = \frac{1}{e} \simeq 0{,}4$

c) $h(x) = 0 \iff \ln x = 0 \iff \boxed{x=1}$

3°) Quel soit $\alpha \in]0;\frac{1}{e}[$ il existe un réel unique $a \in]1;e[$ car sur cet intervalle la fonction h est continue et strictement monotone donc définit une BIJECTION de]1;e[sur son image $]0;\frac{1}{e}[$ donc tout $\alpha \in]0;\frac{1}{e}[$ admet un antécédent unique par h sur $]0;\frac{1}{e}[$. De même h est elle continue et strictement monotone (décroissante) sur $]e;+\infty[$ et donc définit une 2e bijection de $]e;+\infty[$ sur $]0;\frac{1}{e}[$ et donc $\alpha \in]0;\frac{1}{e}[$ admet un autre antécédent unique b sur $]e;+\infty[$. Ainsi $h(a) = h(b) = \alpha$.

Ainsi $\frac{\ln a}{a} = \frac{\ln b}{b} \iff a^b = b^a$ donc $(a;b)$ sol de (E) de même que $(b;a)$.

4°) D'après la figure en faisant varier α de 0 à $\frac{1}{e}$ on obtient que :

s étant l'application $\begin{cases} [1;e] \longrightarrow [0;e] \\ a \longmapsto b \end{cases}$ tel que $h(b) = h(a)$. on pose $b = s(a)$

a) $\lim_{a\to1^+} s(a) = +\infty$

b) $\lim_{a\to e^-} s(a) = e$

c)

a	1	e
$b = s(a)$	$+\infty$ ↘	e

Quand a varie de 1 à e b varie de à e donc s ↘

5°) le seul entier compris entre 1 et e est 2 et son image par s est 4 car $h(2) = \frac{\ln 2}{2} = \frac{2\ln 2}{4} = \frac{\ln 4}{4} = h(4)$ les couples solution sont donc exclusivement $(2;4)$ et $(4;2)$ $\boxed{2^4 = 4^2} = 16$.