Fonctions Exponentielle et Logarithme • Dérivées • TVI • Suites • Intégrales

[Calculatrices autorisées]

EXERCICE 1 (4 points)

1) Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$ par : $g(x)=\dfrac{1}{x(x^2-1)}$.

a) Déterminer les nombres réels a, b et c tels que l'on ait, pour tout $x>1$:

$$g(x)=\frac{a}{x}+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{x-1}.$$

b) Trouver une primitive G de g sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$.

2) Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{2x}{(x^2-1)^2}$.

Trouver une primitive F de f sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$.

3) En utilisant les résultats obtenus précédemment, calculer : $I=\displaystyle\int_2^3\frac{2x}{(x^2-1)^2}\ln x\,\mathrm{d}x$.

On donnera le résultat exact sous la forme $p\ln 2+q\ln 3$, avec p et q rationnels.

EXERCICE 2 (6 points)

Le but de ce problème est d'étudier, pour x et y éléments distincts de l'intervalle $]0\,;+\infty[$, les couples solutions de l'équation $x^y=y^x$ (E) et, en particulier, les couples constitués d'entiers.

1) Montrer que l'équation (E) est équivalente à $\dfrac{\ln x}{x}=\dfrac{\ln y}{y}$.

2) Soit h la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $h(x)=\dfrac{\ln x}{x}$.

La courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction h est donnée en annexe ; x_0 est l'abscisse du maximum de la fonction h sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

a) Rappeler la limite de la fonction h en $+\infty$ et déterminer la limite de la fonction h en 0.

b) Calculer $h'(x)$, où h' désigne la fonction dérivée de la fonction h ; retrouver les variations de la fonction h.
Déterminer les valeurs exactes de x_0 et de $h(x_0)$.

c) Déterminer l'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses.

3) Soit λ un élément de l'intervalle $]0\,,\dfrac{1}{\mathrm{e}}[$.

Prouver l'existence d'un unique nombre réel a de l'intervalle $]1\,;\mathrm{e}[$ et d'un unique nombre réel b de l'intervalle $]\mathrm{e}\,;+\infty[$ tels que $h(a)=h(b)=\lambda$.
Ainsi le couple (a,b) est solution de (E).

4) On considère la fonction s qui, à tout nombre réel a de l'intervalle $]1;\mathrm{e}[$, associe l'unique nombre réel b de l'intervalle $]\mathrm{e}\,;+\infty[$ tel que $h(a)=h(b)$ (on ne cherchera pas à exprimer $s(a)$ en fonction de a).

Par lecture graphique uniquement et sans justification, répondre aux questions suivantes :

a) Quelle est la limite de s quand a tend vers 1 par valeurs supérieures ?

b) Quelle est la limite de s quand a tend vers e par valeurs inférieures ?

c) Déterminer les variations de la fonction s. Dresser le tableau de variation de s.

5) Déterminer les couples d'entiers distincts solutions de (E).

Exercice 3 (3 points)

1. Soit u la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \text{pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2-u_n} \end{cases}$

   a) Calculer u_1, u_2 et u_3. On exprimera chacun de ces termes sous forme d'une fraction irréductible.

   b) Comparer les quatre premiers termes de la suite u aux quatre premiers termes de la suite w définie sur **N** par $w_n = \dfrac{n}{n+1}$.

   c) A l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n = w_n$.

2. Soit v la suite de terme général v_n défini par $v_n = \ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right)$ où ln désigne la fonction logarithme népérien.

   a) Montrer que $v_1 + v_2 + v_3 = -\ln 4$.

   b) Soit S_n la somme définie pour tout entier naturel non nul n par : $S_n = v_1 + v_2 + \ldots + v_n$.
   Exprimer S_n en fonction de n.
   Déterminer la limite de S_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 4 *(7 points)*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + \ln 4 + \dfrac{2}{e^x + 1}$, et (C) sa représentation graphique dans un repère du plan.

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$, et sa limite en $-\infty$.

2. Calculer, pour tout réel x, $f(x) + f(-x)$.

- Que peut-on en déduire pour le point $A(0\ ;\ 1+\ln 4)$?

3. Étudier le sens de variation de la fonction f et dresser son tableau de variations.

4. *a.* Justifier que, pour tout réel m, l'équation $f(x) = m$ admet une solution unique dans $\mathbb{R}$.

   b. Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-1} de la solution α de l'équation $f(x) = 3$.
   Justifier la réponse.

   c. Pour quelle valeur de m le nombre $-\alpha$ est-il la solution de l'équation $f(x) = m$?

5. *a.* Montrer que pour tout réel x, $f(x) = x + 2 + \ln 4 - \dfrac{2e^x}{e^x + 1}$.

   b. Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x + \ln 4$ et la droite (Δ') d'équation $y = x + 2 + \ln 4$ sont des asymptotes de la courbe (C).

   Étudier la position de la courbe (C) par rapport à son asymptote (Δ).

6. *a.* On considère un réel positif α. Que représente l'intégrale : $I(\alpha) = \displaystyle\int_0^\alpha \left[f(x) - x - \ln 4\right] dx$?

   b. Montrer que $I(\alpha) = 2\ln\left(\dfrac{2e^\alpha}{e^\alpha + 1}\right)$ (on pourra utiliser le résultat de la question 5. *a.*).

   c. Calculer α pour que $I(\alpha) = 1$, puis donner une valeur approchée de α à 10^{-1} près.