**Exercice 4 (5 points)** *À traiter par les candidats* ***n'ayant pas choisi*** *la spécialité mathématique*

On considère la fonction numérique $g$ définie sur $[0, 1]$ par :

$$\begin{cases} g(t) = (1 - e^{-t}) \ln t & \text{pour } 0 < t \leqslant 1 \\ g(0) = 0 \end{cases}$$

(ln désignant le logarithme népérien).

**1.** Démontrer que $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{1 - e^{-t}}{t} = 1$. [0,5]

**2.** Démontrer que $g$ est continue sur $[0, 1]$. Étudier la dérivabilité de $g$ sur $[0, 1]$ et démontrer que pour tout réel $t$ de $]0, 1]$ : [0,5] [0,5]

$$g'(t) = \frac{e^{-t}}{t}(t \ln t + e^t - 1).$$ [0,5]

**3.** Soit la fonction numérique $f$ définie sur $]0, 1]$ par $f(t) = t \ln t + e^t - 1$. Étudier le sens de variation et les valeurs aux bornes de $f'$. Montrer que $f'$ s'annule une seule fois sur l'intervalle $]0, 1]$ en un point $t_0$ (on ne calculera pas $t_0$). [0,5] [0,5]
En déduire le signe de $f'(t)$ et le sens de variation de $f$ sur $]0, 1]$. [0,5]
En déduire que $f$ ne s'annule qu'une seule fois sur $]0, 1]$ pour une valeur $t_1$ (on ne calculera pas $t_1$). [0,5]

**4.** Terminer l'étude de la fonction $g$. Tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 6 cm). On tracera la tangente à la courbe au point d'abscisse 0. On admettra que $t_1 \simeq 0,31$. [0,5] [0,5]

---

**Exercice 5 (5 points)** *À traiter par les candidats* ***ayant choisi*** *la spécialité mathématique.*
*Les parties I et II sont indépendantes.*

## Partie I

On considère l'équation (1) : $20b - 9c = 2$ où les inconnues $b$ et $c$ appartiennent à l'ensemble $\mathbb{Z}$ des nombres entiers relatifs.

**1. a.** Montrer que si le couple $(b_0, c_0)$ d'entiers relatifs est une solution de l'équation (1), alors $c_0$ est un multiple de 2. [0,5]

**b.** On désigne par $d$ le p.g.c.d. de $|b_0|$ et $|c_0|$. Quelles sont les valeurs possibles de $d$? [0,5]

**2.** Déterminer une solution particulière de l'équation (1), puis déterminer l'ensemble des solutions de cette équation. [1]

**3.** Déterminer l'ensemble des solutions $(b, c)$ de (1) telles que p.g.c.d. $(b, c) = 2$. [0,75]

**4.** Soit $r$ un nombre entier naturel supérieur ou égal à 2. Le nombre entier naturel P, déterminé par $P = \alpha_n r^n + \alpha_{n-1} r^{n-1} + \ldots + \alpha_1 r + \alpha_0$, où $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \ldots, \alpha_1, \alpha_0$ sont des nombres entiers naturels vérifiant $0 < \alpha_n < r$, $0 \leqslant \alpha_{n-1} < r$, ..., $0 \leqslant \alpha_0 < r$ est noté $\overline{\alpha_n \alpha_{n-1} \ldots \alpha_1 \alpha_0}^{(r)}$ ; cette écriture est dite « écriture de P en base $r$ ». Soit P un nombre entier naturel s'écrivant $\overline{ca5}^{(6)}$ et $\overline{bbaa}^{(4)}$ (en base six et en base quatre respectivement).
Montrer que $a + 5$ est un multiple de 4 et en déduire les valeurs de $a$, puis de $b$ et de $c$. Donner l'écriture de P dans le système décimal. [1]

## Partie II

Soit $p$ entier naturel non premier ($p \geqslant 2$). [0,5]

**1.** Prouver que $p$ admet un diviseur $q$ $(1 < q < p)$ qui divise $(p - 1)!$ [0,25]

**2.** L'entier $q$ divise-t-il l'entier : $(p - 1)! + 1$ ? [0,5]

**3.** L'entier $p$ divise-t-il l'entier : $(p - 1)! + 1$ ?