Exercice 2 (6 points) *À traiter par* ***tous les candidats.***

Le plan P est muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique 3 cm).

1. On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(0) = 1$ et $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$ pour $x > 0$. Préciser la limite de f en zéro. [0,5]

2. a. Étudier le sens de variation de la fonction g définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$g(x) = \ln(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right).$$

Calculer $g(0)$ et en déduire que sur $\mathbb{R}^+$: [1]

$$\ln(1+x) \leqslant x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

b. Par une étude analogue, montrer que si $x \geqslant 0$, alors :

$$\ln(1+x) \geqslant x - \frac{x^2}{2}.$$ [1]

c. Établir que pour tout x strictement positif on a :

$$-\frac{1}{2} \leqslant \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} \leqslant -\frac{1}{2} + \frac{x}{3}.$$ [1]

En déduire que f est dérivable en zéro et que $f'(0) = -\dfrac{1}{2}$.

3. a. Soit h la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $h(x) = \dfrac{x}{1+x} - \ln(1+x)$. [1]
Étudier son sens de variation et en déduire le signe de h sur $[0, +\infty[$.

b. Montrer que sur $]0, +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{h(x)}{x^2}$. [0,25]

c. Dresser le tableau de variation de f en précisant la limite de f en $+\infty$. [0,5]
d. On désigne par C la représentation graphique de f dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.
Construire la tangente T à C au point d'abscisse 0. [0,25]
Montrer que C admet une asymptote. Tracer la courbe C. [0,5]

Exercice 3 (4 points) *À traiter par* ***tous les candidats.***

On définit deux suites u et v par $u_0 = 1$, $v_0 = 12$ et pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{1}{3}(u_n + 2v_n) \\ v_{n+1} = \dfrac{1}{4}(u_n + 3v_n) \end{cases}$$

1. On appelle w la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$w_n = v_n - u_n.$$

a. Montrer que w est une suite géométrique à termes positifs, dont on précisera la raison. [0,5]
b. Déterminer la limite de la suite w. [0,5]

2. a. Montrer que la suite u est croissante. [0,5]
b. Montrer que la suite v est décroissante. [0,5]
c. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_0 \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant v_0$. [0,5]

3. Montrer que les deux suites u et v convergent et ont la même limite que l'on appellera ℓ. [0,5]

4. On appelle t la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$t_n = 3u_n + 8v_n.$$

a. Montrer que t est une suite constante. Déterminer cette constante. [0,5]
b. Déterminer alors la valeur de ℓ. [0,5]