BAC BLANC 1 - TS - 2004-2005

Mathématiques

Exercice 1 (5 points) *À traiter par **tous les candidats**.*

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\,\vec{u},\,\vec{v})$, A, A′, B, B′ sont les points d'affixes respectives $1, -1, i, -i$.

À tout point M d'affixe z, distinct des points O, A, A′, B et B′, on associe les points M_1 et M_2 d'affixes respectives z_1 et z_2, tels que les triangles BMM_1 et AMM_2 soient rectangles et isocèles, avec $(\overrightarrow{M_1B}, \overrightarrow{M_1M}) = (\overrightarrow{M_2M}, \overrightarrow{M_2A}) = \frac{\pi}{2}$.

Voir la figure ci-dessous.

1. a. Justifier les égalités $z - z_1 = i(i - z_1)$ et $1 - z_2 = i(z - z_2)$. → [0,5 + 0,5]

b. Vérifier que z_1 et z_2 peuvent s'écrire :

$$z_1 = \frac{1+i}{2}(z+1) \text{ et } z_2 = \frac{1-i}{2}(z+i).$$ → [0,25 + 0,25]

2. On se propose dans cette question de déterminer les points M pour lesquels le triangle OM_1M_2 est équilatéral.

a. Montrer que : $OM_1 = OM_2$ équivaut à $|z+1| = |z+i|$. → [0,5]

En déduire l'ensemble (Δ) des points M tels que $OM_1 = OM_2$ et tracer (Δ) sur la figure. [0,5]

b. Montrer que : $OM_1 = M_1M_2$ équivaut à $|z+1|^2 = 2|z|^2$. [0,75]

c. En déduire l'ensemble (Γ) des points M du plan pour lesquels $OM_1 = M_1M_2$. [0,5]

(On pourra montrer que $|z+1|^2 = 2|z|^2$ équivaut à $|z-1|^2 = 2$.) [0,5]

Tracer (Γ) sur la figure. [0,25]

d. En déduire les deux points M pour lesquels OM_1M_2 est un triangle équilatéral et les placer sur la figure. [0,5]