Exercice I [5 points] : Nombres Complexes

Hypothèses : dans un repère orthonormal on donne les points A, A', B, B' tels que : $z_A = 1$; $z_{A'} = -1$; $z_B = i$; $z_{B'} = -i$

$M(z) \longmapsto (M_1(z_1) ; M_2(z_2))$ tels que les triangles BMM_1 et AMM_2 soient isocèles et rectangles resp. en M_1 et en M_2, c'est-à-dire que $\begin{cases} M_1M = M_1B \\ (\overrightarrow{M_1B} ; \overrightarrow{M_1M}) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$ (1) et de même $\begin{cases} M_2A = M_2M \\ (\overrightarrow{M_2M} ; \overrightarrow{M_2A}) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$ (2)

1°) a) Le système (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} |z - z_1| = |z_B - z_1| \\ \text{Arg}\left(\frac{z - z_1}{z_B - z_1}\right) = \frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{z - z_1}{z_B - z_1} = e^{i\,\pi/2} = i \Leftrightarrow z - z_1 = i\,(z_B - z_1) \Leftrightarrow z - z_1 = i\,(i - z_1)$

NB : Cette égalité revient à dire que M est l'image de B dans la rotation de centre M_1 et d'angle $+\frac{\pi}{2}$

Le système (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} |z_A - z_2| = |z - z_2| \\ \text{Arg}\left(\frac{z_A - z_2}{z - z_2}\right) = \frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{z_A - z_2}{z - z_2} = e^{i\,\pi/2} = i \Leftrightarrow z_A - z_2 = i\,(z - z_2) \Leftrightarrow 1 - z_2 = i\,(z - z_2)$

NB : Cette égalité revient à dire que A est l'image de M dans la rotation de centre M_2 et d'angle $+\frac{\pi}{2}$

1°) b) $z - z_1 = i\,(i - z_1) \Leftrightarrow z_1(1 - i) = z + 1 \Leftrightarrow z_1 = \frac{z+1}{1-i} = \frac{1+i}{2}(z+1)$ C.Q.F.D. , car $(1 + i)(1 - i) = 2$

Et $1 - z_2 = i\,(z - z_2) \Leftrightarrow z_2(i - 1) = iz - 1 \Leftrightarrow z_2(i-1) = i(z + i) \Leftrightarrow z_2 = \frac{-i}{1-i}(z + i) = \frac{1-i}{2}(z + i)$ C.Q.F.D, car $(1+i)(-i) = 1 - i$

2°) a) $OM_1 = OM_2 \Leftrightarrow |z_1| = |z_2| \Leftrightarrow \left|\frac{1+i}{2}(z+1)\right| = \left|\frac{1-i}{2}(z+i)\right| \Leftrightarrow \left|\frac{1+i}{2}\right| |z+1| = \left|\frac{1-i}{2}\right| |z+i| \Leftrightarrow$ $\frac{\sqrt{2}}{2}|z+1| = \frac{\sqrt{2}}{2}|z+i| \Leftrightarrow |z+1| = |z+i| \Leftrightarrow |z - z_{A'}| = |z - z_{B'}| \Leftrightarrow MA' = MB' \Leftrightarrow M \in (\Delta)$ Médiatrice de [A'B'].

2°) b) $OM_1 = M_1M_2 \Leftrightarrow |z_1| = |z_2 - z_1| \Leftrightarrow \left|\frac{1+i}{2}(z+1)\right| = \left|\frac{1-i}{2}(z+i) - \frac{1+i}{2}(z+1)\right|$

$\Leftrightarrow \left|\frac{1+i}{2}(z+1)\right| = |z| \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}|z+1| = |z| \Leftrightarrow \frac{1}{2}|z+1|^2 = |z|^2 \Leftrightarrow |z+1|^2 = 2|z|^2$ C.Q.F.D.

c) On sait que le carré du module d'un nb complexe z est égal au produit de z par son conjugué $\bar{z}$:

Par suite on a $2|z|^2 = 2\,z.\bar{z}$ et $|z+1|^2 = (z+1).(\bar{z}+1) = z.\bar{z} + z + \bar{z} + 1$

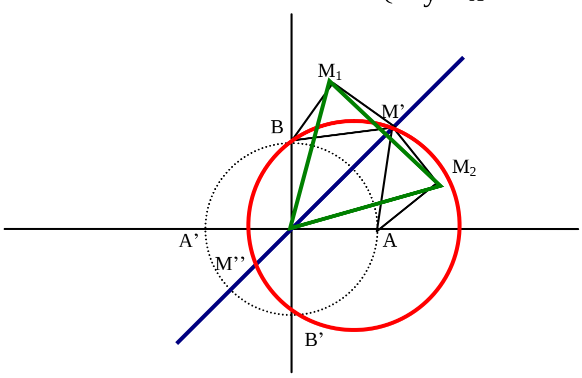
De même : $|z-1|^2 = (z-1).(\bar{z}-1) = z.\bar{z} - z - \bar{z} + 1$

Donc $|z+1|^2 = 2|z|^2 \Leftrightarrow 2\,z.\bar{z} = z.\bar{z} + z + \bar{z} + 1 \Leftrightarrow z.\bar{z} - z - \bar{z} + 1 = 2 \Leftrightarrow |z-1|^2 = 2$

Finalement $OM_1 = M_1M_2 \Leftrightarrow |z-1|^2 = 2 \Leftrightarrow AM^2 = 2 \Leftrightarrow AM = \sqrt{2} \Leftrightarrow M \in (\Gamma)$ Cercle de centre A et de rayon $R = \sqrt{2}$, c'est-à-dire le cercle de centre A passant par B et B' sur la figure ci-dessous.

d) Le triangle OM_1M_2 est équilatéral si et seulement si les deux conditions ci-dessus sont réalisées simultanément, c'est-à-dire ssi $OM_1 = OM_2 = M_1M_2 \Leftrightarrow M \in (\Delta) \cap (\Gamma)$ i.e. intersection de la droite (Δ) et du cercle (Γ). Or la droite (Δ) a pour équation $y = x$ et le cercle (Γ) a pour équation $(x-1)^2 + y^2 = 2$.
Donc les deux points M' et M'' cherchés ont pour coordonnées les solutions du système des 2 équations :

$$\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = 2 \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 2x - 1 = 0 \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \text{ ou } x = \frac{1-\sqrt{3}}{2} \\ y = x \end{cases}$$



Exercice II [6 points] : Encadrement de ln(1 + x) au voisinage de 0, et dérivabilité de $\dfrac{\ln(1+x)}{x}$ à l'origine.

1°) On définit la fonction f par $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$ pour $x > 0$ et on pose $f(0) = 1$.

La fonction f est donc bien définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$, il s'agit d'étudier sa continuité et sa dérivabilité en 0^+

Par définition une fonction f est continue en x_0 si et seulement si elle admet une limite <u>finie</u> en x_0 et si cette limite coïncide avec la valeur définie pour f en ce point, i.e. : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Ici on cherche donc la limite de $\dfrac{\ln(1+x)}{x}$ quand x tend vers 0^+ (car ici f non définie à gauche de 0).

Cette expression prend la forme indéterminée $\dfrac{0}{0}$ mais on peut lever cette indétermination en observant que le rapport $\dfrac{\ln(1+x)}{x}$ n'est autre que le taux d'accroissement de la fonction logarithme au voisinage de 1.

En effet on sait que $\dfrac{\ln(1+h)}{h} = \dfrac{\ln(x) - \ln(1)}{x-1}$, avec $h = x-1$ ou $x = 1 + h$, *et* $\ln 1=0$, sa limite quand h tend vers 0 (ou x tend vers 1) est donc le nombre dérivé de f en 1. Or $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$ *donc* $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\ln(1+h)}{h} = \ln'(1) = 1$ ou en changeant la variable h en x : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$ et *a fortiori* $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1 = f(0)$ donc f continue à droite en 0.

<u>Rappel</u> : une fonction peut être continue en un point sans être dérivable en ce point, il est donc nécessaire d'étudier sa dérivabilité. Ici les formules ne s'appliquent pas pour x = 0, il faut donc calculer directement la limite du taux d'accroissement de f quand x tend vers $0^{(+)}$. Pour cela on étudie d'abord un encadrement de f(x) au voisinage de 0^+.

2°) On définit la fonction g par $g(x) = \ln(1+x) - \left(x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}\right)$ pour $x \geq 0$

On en déduit immédiatement $g'(x) = \dfrac{1}{1+x} - (1 - x + x^2) = \boxed{\dfrac{-x^3}{1+x}}$ donc $g'(x) \leq 0$ pour $x \geq 0$ donc g strictement décroissante sur $[0\,;+\infty[$ et comme $g(0) = 0$ on en déduit que $g(x) \leq 0$ sur $[0\,;+\infty[$ d'où la première inégalité :

$$\ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \quad (1)$$

De même on pose $k(x) = \ln(1+x) - \left(x - \dfrac{x^2}{2}\right)$ pour $x \geq 0$ donc $k'(x) = \dfrac{1}{1+x} - (1 - x) = \boxed{\dfrac{x^2}{1+x}} \geq 0$ pour $x \geq 0$

Donc k est croissante sur $[0\,;+\infty[$ et comme $k(0) = 0$ on en déduit que $k(x) \geq 0$ sur $[0\,;+\infty[$ d'où la 2e inégalité :

$$\ln(1+x) \geq x - \frac{x^2}{2} \quad (2)$$

Finalement on obtient pour $x \geq 0$: $\quad x - \dfrac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}$

Donc pour $x > 0$ $\quad \boxed{-\dfrac{1}{2} \leq \dfrac{\ln(1+x) - x}{x^2} \leq -\dfrac{1}{2} + \dfrac{x}{3}} \quad (3)$

Or le taux d'accroissement de f en 0 est égal à $\dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \dfrac{\dfrac{\ln(1+x)}{x} - 1}{x} = \dfrac{\ln(1+x) - x}{x^2}$

Or d'après le théorème d'encadrement des limites (« *théorème des gendarmes* ») les inégalités (3) donnent :

$\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln(1+x) - x}{x^2} = -\dfrac{1}{2}$. Donc par définition f est dérivable en 0 (à droite) et $\boxed{f'(0) = -\dfrac{1}{2}}$ *C.Q.F.D.*

3°) a) Soit $h(x) = \dfrac{x}{1+x} - \ln(1+x)$ pour $x \geq 0$; on en déduit immédiatement $h'(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2} - \dfrac{1}{1+x} = \boxed{-\dfrac{x}{(1+x)^2}}$

Donc $h'(x) \leq 0$ pour $x \geq 0$ donc h décroissante sur $[0\,;+\infty[$ et comme $h(0) = 0$ on en déduit que $\boxed{h(x) \leq 0 \text{ pour } x \geq 0}$

3°) b) pour $x > 0$ les formules des dérivées s'appliquent à $f(x)$ et on obtient $f'(x) = \dfrac{\dfrac{x}{1+x} - \ln(1+x)}{x^2} = \dfrac{h(x)}{x^2}$, donc d'après 2°) et 3°)a) la fonction f est bien dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et $f'(x) < 0$ sur $[0\,;+\infty[$, donc f strictement décroissante sur $[0\,;+\infty[$.

Enfin on a $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(1+x)}{1+x} \cdot \dfrac{1+x}{x} = 0 \times 1 = 0$ en effet on sait que pour $X = 1 + x$ *on a*

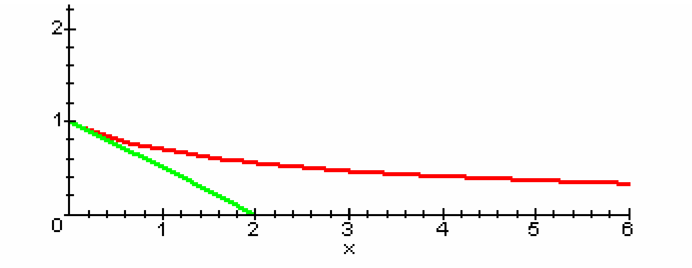
$\lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{\ln X}{X} = 0$ *(théorème de croissance comparée de la fonction logarithme et de la fonction puissance)*

et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x+1}{x} = 1$ *(théorème de la limite du rapport des termes de plus haut degré dans la fraction).Ainsi peut-on affirmer que la courbe représentative de la fonction f admet pour asymptote l'axe Ox (y = 0) en +∞.*

Enfin , la demi- tangente (T_0) à la courbe au point A(0 ;1) a pour équation $y = -\frac{1}{2}x + 1$.

Pour établir la position de la courbe par rapport à sa tangente en A, il suffirait de déterminer le signe de la différence $[\, f(x) - (-\frac{1}{2}x + 1)\,]$ *(x >0). Or on a établi dans la question 2°) que* $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$ donc

$1 - \frac{x}{2} \leq \dfrac{\ln(1+x)}{x} \leq 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3}$ *Par suite on obtient* $0 \leq f(x) - (-\frac{1}{2}x + 1) \leq \frac{x^2}{3}$ *donc que C_f est située au dessus de (T_0) sur [0 ;+∞ [.*



Exercice III [4 points] : Suites Numériques adjacentes avec récurrence croisée.

Hypothèses : $\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + 2v_n) \text{ et } u_0 = 1 \\ v_{n+1} = \frac{1}{4}(u_n + 3v_n) \text{ et } v_0 = 12 \end{cases}$ on pose $w_n = v_n - u_n$

1°) Pour montrer que (w_n) est géométrique *il suffit* de montrer que le rapport $\frac{w_{n+1}}{w_n}$ est constant :

$$w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{1}{4}(u_n + 3v_n) - \frac{1}{3}(u_n + 2v_n) = \frac{1}{12}(v_n - u_n) = \frac{1}{12}w_n \text{ donc } \boxed{\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{1}{12}} \text{ C.Q.F.D.}$$

(w_n) est donc une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{12}$et de premier terme $w_0 = v_0 - u_0 = 11$, donc $w_n = 11.\left(\frac{1}{12}\right)^n$

Ainsi on peut affirmer que $w_n > 0$ pour tout entier $n \geq 0$. De plus on a $|q| < 1$ donc $\lim w_n = 0$.

2°) a) Pour montrer que (u_n) est croissante *il suffit* de montrer que ($u_{n+1} - u_n$) est toujours positif :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(u_n + 2v_n) - un = \frac{2}{3}v_n - \frac{2}{3}u_n = \frac{2}{3}(v_n - u_n) = \frac{2}{3}w_n > 0 \text{ C.Q.F.D.}$$

b) Pour montrer que (v_n) est décroissante *il suffit* de montrer que ($v_{n+1} - v_n$) est toujours négatif :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{4}(u_n + 3v_n) - v_n = -\frac{1}{4}v_n + \frac{1}{4}u_n = -\frac{1}{4}(v_n - u_n) = -\frac{1}{4}w_n < 0 \text{ C.Q.F.D}$$

c) On a $u_{n+1} > u_n$ pour tout n donc *par récurrence immédiate* : $u_n > u_0$, de même $v_{n+1} < v_n$ pour tout n donc $v_n < v_0$ et $w_n = v_n - u_n > 0$ pour tout n, donc pour tout n : $u_0 < u_n < v_n < v_0$, et donc $\boxed{u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0}$ *C.Q.F.D.*

3°) Les deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes car l'une est croissante, l'autre décroissante dans l'ordre $u_n \leq v_n$ et leur différence tend vers 0. Elles sont donc toutes deux convergentes vers une même limite ℓ .

4°) La suite définie par $t_n = 3u_n + 8v_n$ est constante car pour tout n on peut écrire $t_{n+1} = 3u_{n+1} + 8v_{n+1} = 3u_n + 8v_n = t_n$
Donc pour tout n on a $t_n = t_0 = 3u_0 + 8v_0 = 3 + 96 = 99$.
Par suite (sic !) $\lim t_n = 99$ or $\lim t_n = \lim (3u_n + 8v_n) = 3 \lim u_n + 8 \lim v_n$, donc $99 = 3\ell + 8\ell = 11\ell$ d'où $\boxed{\ell = 9.}$

NB :Dans cet exercice il était inutile et dangereux de tenter une démonstration par récurrence pour montrer la monotonie des suites (u_n) et (v_n), car l'hypothèse de récurrence [H_n] $u_{n+1} \geq u_n$ est bien vraie pour n = 0 mais l'hérédité pose un problème du fait du croisement des définitions des deux suites. En effet :

$$u_{n+2} = \frac{1}{3}(u_{n+1} + 2v_{n+1}) = \frac{1}{3}u_{n+1} + \frac{2}{3}v_{n+1} = \frac{1}{9}(u_n + 2v_n) + \frac{1}{6}(u_n + 3v_n) = \frac{5}{18}u_n + \frac{13}{18}v_n$$

mais il reste à montrer que $u_{n+2} = \frac{5}{18}u_n + \frac{13}{18}v_n \geq \frac{1}{3}(u_n + 2v_n) = u_{n+1}$ *ce qui se déduit laborieusement de [H_n].*

En effet [H_n] $\Rightarrow v_n \geq u_n \Rightarrow 5u_n + 13v_n \geq 6u_n + 12v_n \Rightarrow u_{n+2} = \frac{1}{18}(5u_n + 13v_n) \geq \frac{1}{18}(6u_n + 12v_n) = \frac{1}{3}(u_n + 2v_n) = u_{n+1}$ *[H_{n+1}]*

Exercice IV [5 points] : Etude d'une fonction en application du T.V.I *(Théorème des valeurs intermédiaires)*

Hypothèse : $\begin{cases} g(t) = (1 - e^{-t}) \ln t \quad , \quad \text{pour } 0 < t \leq 1 \\ g(0) = 0 \end{cases}$

1°) $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{1 - e^{-t}}{t} = \lim\limits_{(-t) \to 0} \dfrac{e^{(-t)} - 1}{(-t)} = \lim\limits_{X \to 0} \dfrac{\text{Exp } X - \text{Exp } 0}{X} = \text{Exp}'(0) = \text{Exp}(0) = 1$

2°) Pour établir que g est continue en 0 il faut et il suffit de montrer $\lim\limits_{t \to 0} g(t) = g(0)$

Pour lever l'indétermination du type « 0 . ∞ » on transforme l'expression de g(t) en tenant compte du résultat du 1°) :

$$\text{Pour } t > 0 ,\ g(t) = \frac{1 - e^{-t}}{t} . (t.\ln t) \text{ donc } \lim_{t \to 0^+} g(t) = 1 \times 0 = 0 \text{, car } \lim_{t \to 0^+} t.\ln t = 0 \ .$$

Pour étudier la dérivabilité de g en 0 on doit calculer la limite de son taux d'accroissement en 0^+, car les formules ne peuvent s'appliquer pour t = 0.

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{g(t) - g(0)}{t} = \boxed{\lim_{t \to 0^+} \frac{1 - e^{-t}}{t} . \ln t = -\infty}$$ en vertu du résultat du 1°) *et de* $\lim\limits_{t \to 0^+} \ln t = -\infty$.

Donc g est non dérivable en 0^+ et la courbe C_g admet une demi-tangente « verticale » tournée vers le « bas » en O.

2°) Les formules des dérivées s'appliquent pour x > 0 :

$$g'(x) = e^{-t} \ln t + \frac{1 - e^{-t}}{t} = \frac{t.e^{-t} .\ln t + 1 - e^{-t}}{t} = \frac{e^{-t}}{t} (t \ln t + e^{t} - 1)$$

3°) Pour tout t, $0 < t \leq 1$ on pose $f(t) = t.\ln t + e^{t} - 1$, *on en déduit immédiatement* $f'(t) = \ln t + 1 + e^{t}$
Or sur l'intervalle]0 ; 1] les deux fonctions ln et Exp sont strictement croissantes donc f' est également croissante sur cet intervalle. De plus f' est monotone, continue et change de signe sur]0 ;1] car f '(1)=1+ e >0, et $\lim\limits_{t \to 0^+} f'(t) = -\infty$*. Donc, en vertu du théorème des valeurs intermédiaires il existe un nombre unique $t_0 \in]0 ;1[$ tel que $f'(t_0) = 0$, et comme f' est croissante on en déduit que f'(t) <0 sur]0 ; t_0[et que f'(t) >0 sur] t_0 ;1[. Donc f décroissante sur]0 ; t_0[et croissante sur l'intervalle] t_0 ;1[.*
De même f est-elle continue et monotone sur] t_0 ;1[donc elle réalise une bijection de] t_0 ;1[sur]f(t_0) ; f(1)[.
Comme de plus f(1) = e-1>0 et f(t_0)<0 car f étant décroissante sur l'intervalle]0 ; t_0 [et ayant pour limite 0^- en 0^+ le minimum f(t_0) = m est nécessairement inférieur à 0. Ainsi f change de signe sur l'intervalle] t_0 ;1[seulement, et par suite il existe un nombre réel et un seul $t_1 \in]\, t_0 ;1[$ tel que f(t_1) = 0.

4°) *Pour tout t > 0 on observe que* $g'(t) = \dfrac{e^{-t}}{t} f(t)$ *donc le Signe de g'(t) est le même que celui de f(t) c'est-à-dire négatif sur]0 ; t_1[et positif sur] t_1 ; 1[.Par suite la fonction g est donc décroissante sur]0 ; t_1[et croissante sur l'intervalle] t_1 ; 1[. Enfin on a g(0) = 0 par hypothèse, g(1) = (1- e^{-1}) ln 1 = 0, et g(t_1) ≅ g(0,31) ≅ 0,3 d'où le tableau de variation et la courbe ci-dessous.*

t	0	t_0	$t_1 \simeq 0,3$	1
f '(t)	$-\infty$ ↗	0	↗	1+e
f(t)	0 ↘ –	m	↗ – 0 +	e-1
g	0 ↘		0,3 ↗	0