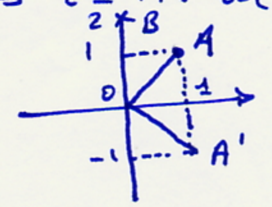
Exercice I Nombres complexes

Term. S_4 / C0 / C4 / 07.12.04

1. $(z-2i)(z^2-2z+2)=0 \iff \begin{cases} z-2i=0 \\ \text{ou} \\ z^2-2z+2=0 \end{cases} \iff \begin{cases} z=2i \\ \text{ou} \\ (z-1)^2+1=0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} z=2i \\ \text{ou} \\ (z-1)^2=-1=i^2 \end{cases} \iff z-1=i$ ou $z-1=-i \iff z=1+i$ ou $z=1-i$ ou $z=2i$

les solutions sont donc $\begin{cases} z_A = 1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \\ z_{A'} = 1-i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} \\ z_B = 2i = 2e^{i\frac{\pi}{2}} \end{cases}$.



$z_{A'}$ conjugué de z_A

z_B Im. pur.

2. $z' = \dfrac{z-2i}{z-1-i} = \dfrac{z-z_B}{z-z_A}$ $(z \neq z_A)$

a) z' Imaginaire PUR $\iff [z'=0$ ou $\operatorname{Arg}(z') = \frac{\pi}{2}+k\pi]$ $(z \neq z_A)$.

$\iff z=z_B$ ou $\operatorname{Arg}\left(\dfrac{z-z_B}{z-z_A}\right) = \frac{\pi}{2}+k\pi \iff M=B$ ou $(\vec{MA};\vec{MB}) = \frac{\pi}{2}+k\pi$

$\iff M=B$ ou $\widehat{MAB}$ Rectangle en $M \iff M=B$ ou $M \in$ CERCLE de Diam [AB] (PRIVÉ de A)

l'ensemble (E) est donc le CERCLE de DIAMETRE [AB] privé de A, et $B \in (E)$.

b) $|z'|=1 \iff \left|\dfrac{z-z_B}{z-z_A}\right| = 1 \iff \dfrac{|z-z_B|}{|z-z_A|} = 1 \underset{(z\neq z_A)}{\iff} |z-z_B| = |z-z_A| \iff MA = MB$.

Donc l'ensemble (F) est la MÉDIATRICE du segment [AB].

3. R = Rotation $[\Omega(\frac{3}{2};\frac{5}{2});\frac{\pi}{2}]$. R est associée à l'application $r: \begin{cases} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto z' \end{cases}$

a) tel que $z'-w = e^{i\frac{\pi}{2}}(z-w)$ avec w Image de Ω.

$\iff z' = w + i(z-w) = iz + w(1-i) = iz + (\frac{3}{2}+i\frac{5}{2})(1-i)$.

$\iff \boxed{z' = iz + (4+i)}$ en particulier $z_{B'} = iz_B + (4+i)$

Donc $z_{B'} = i(2i)+(4+i) = 2i^2+4+i = -2+4+i = \boxed{2+i} \iff B'(2;1)$

$z_{I'} = iz_I + 4+i = i(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i)+4+i = \boxed{\frac{5}{2}+\frac{3}{2}i} \iff I'(\frac{5}{2};+\frac{3}{2})$.

b) dans une Rotation (ISOMÉTRIE) l'image d'un cercle est un cercle de même rayon et l'image d'une Droite est une Droite faisant avec la droite initiale un angle égal à celui de la rotation (à π près).

le point $I(\frac{1}{2};\frac{3}{2})$ étant le milieu du segment [AB]. $(z_I = \frac{z_A+z_B}{2})$.

$\Rightarrow$ le cercle (E) a pour image le cercle de centre I' passant B'.

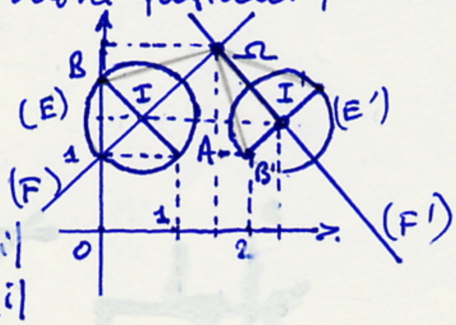
$\Rightarrow$ la droite (F) a pour image la droite passant par I' et $\perp$(F) Donc // (AB)

- le point $\Omega(\frac{3}{2};\frac{5}{2})$ centre de la Rotation R appartient à l'ensemble (F) car $\Omega A = \Omega B$

en effet $|z_A - w| = |1+i-\frac{3}{2}-\frac{5}{2}i| = |-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i|$

et $|z_B - w| = |2i-\frac{3}{2}-\frac{5}{2}i| = |-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i|$

$= \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{10}{4}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$.



Or Ω est INVARIANT dans la ROTATION Donc (F') est la Droite $\perp$(F) et passant par Ω ■

EXERCICE II Hyp : $\begin{cases} [f'(x)]^2 - [f(x)]^2 = 1 & (1) \\ f'(0) = 1 & (2) \\ (3)\ f' \text{ DÉRIVABLE sur } \mathbb{R} \text{ (et } f \text{ DÉRIVABLE sur } \mathbb{R}). \end{cases}$

1.a) $[f'(x)]^2 = [f(x)]^2 + 1 \Rightarrow [f'(x)]^2$ STRICTEMENT POSITIF. (≥ 1).
Donc $f'(x)$ ne peut être nul. CQFD.

b) $[f(x)]^2 = [f'(x)]^2 - 1 \Rightarrow [f(0)]^2 = [f'(0)]^2 - 1 = 1 - 1 = 0$.
Donc $\boxed{f(0) = 0}$.

2. En appliquant la formule de la dérivée d'une fonction composée du type $(w^n)' = n \cdot w^{n-1} w'$ avec $w(x) = f'(x)$ ou $w(x) = f(x)$ avec $n = 2$.
on obtient : $2 \cdot f'(x) \times f''(x) - 2 f(x) \cdot f'(x) = 0$ car f' DÉRIVABLE/$\mathbb{R}$.
$\Rightarrow 2 f'(x) [f''(x) - f(x)] = 0$ mais $f'(x) \neq 0 \Rightarrow f''(x) - f(x) = 0$
i.e $f''(x) = f(x)$ ou $\boxed{f'' = f}$ (sur $\mathbb{R}$). (4).

3. a) $\begin{cases} u = f' + f \\ v = f' - f \end{cases}$ $\Big\|$ $u(0) = f'(0) + f(0) = 1 + 0 = 1$
$v(0) = f'(0) - f(0) = 1 - 0 = 1$.

b) $u' = f'' + f'$ mais d'après (4) $f'' = f \rightarrow u' = f + f' = u$. CQFD.
$v' = f'' - f' = f - f' = -v$. CQFD.

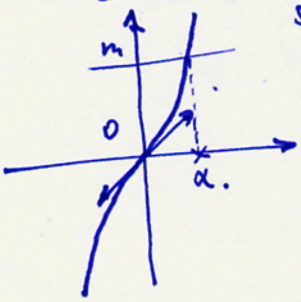
c) $u' = u$ et $u(0) = 1 \Leftrightarrow u = \text{Exp}$. (car définition la fonction exponentielle de base e est la seule fonction satisfaisant ces deux conditions).
$v' = -v$ et $v(0) = 1 \Leftrightarrow v(x) = \text{Exp}(-x)$. [car $v' = kv \Leftrightarrow v(x) = e^{kx}$]

d) $\begin{cases} u = f' + f \\ v = f' - f. \end{cases} \Rightarrow u - v = 2f \Rightarrow f(x) = \dfrac{u(x) - v(x)}{2} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.
(cette fonction | s'appelle Sinus Hyperbolique | voir cont. N°3 !
| se note Sh.

4.a) $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$ car $\lim\limits_{+\infty} e^{-x} = 0$ et $\lim\limits_{+\infty} e^x = +\infty$.
$\lim\limits_{-\infty} f = -\infty$ car $\lim\limits_{-\infty} e^{-x} = +\infty$ et $\lim\limits_{-\infty} e^x = 0$.

b) $f'(x) = \dfrac{u(x) + v(x)}{2} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \Rightarrow f'(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	1	+
f	$-\infty$	0	$+\infty$



5.a). f STRICTEMENT CROISSANTE et CONTINUE sur $\mathbb{R}$ définit une BIJECTION de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$
Donc quel soit $m \in \mathbb{R}$, il existe α unique, $\alpha \in \mathbb{R}$ / $f(\alpha) = m$

PROBLÈME [A] $\boxed{\varphi(x)=(2-x)e^{x}-1}$ | TS4 / Co / C4 / 07.12.

1°) • $\lim\limits_{-\infty}\varphi = \lim\limits_{x\to-\infty}[2e^x - xe^x - 1] = \boxed{-1}$ car $\lim\limits_{-\infty} e^x = 0$ et $\left[\lim\limits_{-\infty} xe^x = 0\right.$ (théorème / co

• $\lim\limits_{+\infty}\varphi = \lim\limits_{x\to+\infty}[(2-x)e^x - 1] = \boxed{-\infty}$ (pas d'INDETERMINATION)

2°) φ est une somme de produits de fonctions toutes dérivables sur $\mathbb{R}$ donc CONTINUES sur $\mathbb{R}$.

$\varphi'(x) = -e^x + (2-x).e^x = e^x(-1+2-x) = \boxed{e^x(1-x)} \Rightarrow \mathrm{Sgn}[f'(x)] = \mathrm{Sgn}$

x	$-\infty$	-2	α	0	1	β	2	$+\infty$
$\varphi'(x)$		+			0		−	
φ	-1 ↗	$-0,4$	0	1	1,8	0	-1	↘ $-\infty$

$\varphi(-2) = 4e^{-2}-1 = \frac{4}{e^2}-1 \simeq -0,4 < 0$

$\varphi(0) = 2.e^0 - 1 = 2-1 = 1 > 0$

$\varphi(1) = e-1 \simeq 1,7 > 0$

$\varphi(2) = -1 < 0$.

3°) φ STRICTEMENT MONOTONE et CONTINUE sur $]-\infty;0]$ et CHANGE de SIGNE sur $[-2;0]$

Donc (par bijection) il existe α unique, $\alpha \in]-2;0[$ tel que $\varphi(\alpha)=0$

De même sur l'intervalle $[1;2]$ φ est strictement monotone et continue (car dérivable) et change de signe.

Donc il existe β unique, $\beta \in]1;2[$ tel que $\varphi(\beta)=0$

Par suite $\begin{cases}\varphi(x) < 0 \text{ sur }]-\infty;\alpha[\cup]\beta;+\infty[. \\ \varphi(x) > 0 \text{ sur }]\alpha;\beta[.\end{cases}$

4°) A l'aide de la calculatrice on trouve $\begin{cases}\varphi(-1,2) = -0,03 < 0 \\ \varphi(-1,1) = 0,03 > 0\end{cases}$

Donc $\alpha \in]-1,2;-1,1[$. et $\varphi(-1,15) < 0$ et $\varphi(-1,14) > 0$.

Donc $\alpha \simeq -1,15$ à 10^{-2} près : $\boxed{-1,15 < \alpha < -1,14.}$

De même on trouve $\varphi(1,8) > 0$ et $\varphi(1,9) > 0$ puis $\varphi(1,84) > 0$ et $\varphi(1,85) < 0$

Donc $\beta \simeq 1,85$ à 10^{-2} près : $\boxed{1,84 < \beta < 1,85}$

5°) Puisque $\varphi(\alpha) = 0$ on a $(2-\alpha)e^{\alpha} - 1 = 0 \Leftrightarrow \boxed{e^{\alpha} = \frac{1}{2-\alpha}.}$ CQFD

[B] $\boxed{f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x - x}}$

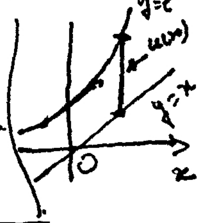
Soit $u(x) = e^x - x$.

$u'(x) = e^x - 1$

$u'(0) = 0$

$u(0) = 1$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$u'(x)$	−	0	+
u	↘	1	↗



D'après le tableau de variation de u on a $u(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$ (mini $=1$)

Donc $e^x - x > 0$ sur $\mathbb{R}$. Donc $D_f =]-\infty;+\infty[$.

[B] 2°) • $\lim_{-\infty} f = 0^-$ car $\lim_{-\infty} e^x = 0$ et $\lim_{-\infty} \frac{1}{x} = 0^-$

• $\lim_{+\infty} f = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{e^x(1-e^{-x})}{e^x(1-xe^{-x})}\right] = \lim_{+\infty}\left(\frac{1-e^{-x}}{1-xe^{-x}}\right) = 1$ car $\lim_{+\infty} e^{-x} = 0$ (COURS).
et $\lim_{+\infty} xe^{-x} = \lim_{+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ puisque $\lim_{+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

3°) $f'(x) = \frac{e^x(e^x-x)-(e^x-1)(e^x-1)}{(e^x-x)^2} = \frac{e^{2x}-xe^x-(e^x-1)^2}{(e^x-x)^2}$ sur $\mathbb{R}$.

$\Rightarrow f'(x) = \frac{e^x(2-x)-1}{(e^x-x)^2} = \frac{\varphi(x)}{(e^x-x)^2} \Rightarrow \text{Sgn}[f'(x)] = \text{Sgn}[\varphi(x)]$.

D'où le tableau :

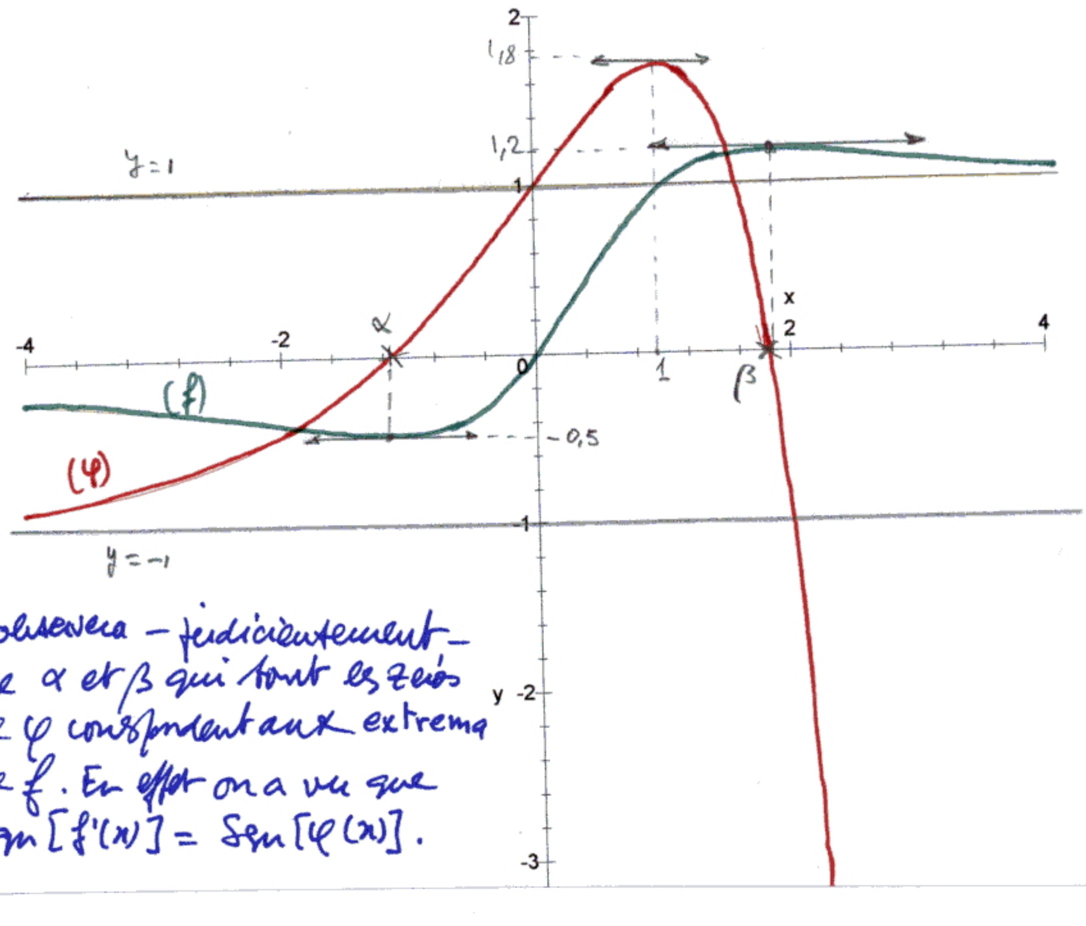
x	$-\infty$		-2	α		0	1	β		2	$+\infty$
$f'(x)$		$-$		0	$+$			0	$-$		
f	0^-	$\searrow$		$-0{,}5$	$\nearrow$			$1{,}2$	$\searrow$		1

$f(\alpha) = \frac{e^\alpha - 1}{e^\alpha - \alpha}$ or $e^\alpha = \frac{1}{2-\alpha}$ d'où $f(\alpha) = \frac{\frac{1}{2-\alpha}-1}{\frac{1}{2-\alpha}-\alpha} = \frac{1-2+\alpha}{1-2\alpha+\alpha^2} = \frac{\alpha-1}{(\alpha-1)^2}$

D'où $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha-1}$ (car $\alpha \neq 1$). On trouve $f(\alpha) \simeq f(-1{,}1) \simeq -0{,}5$

De même $f(\beta) = \frac{1}{\beta-1}$ $(\beta \neq 1) \Rightarrow f(\beta) = f(1{,}8) \simeq 1{,}2$

* Courbes représentatives des fonctions φ et f (Question Hors Sujet).



NB : on observera – judicieusement – que α et β qui sont les zéros de φ correspondent aux extrema de f. En effet on a vu que $\text{Sgn}[f'(x)] = \text{Sgn}[\varphi(x)]$.

PROBLEME : Partie [C] Etude de deux suites | TS4 / Co / C4 / 07.12.04

$\boxed{g(x) = \ln\left(\frac{1}{2-x}\right)}$ $D_g =]-\infty ; 2[$ car on doit avoir $2-x > 0$ (STRICT)

• (HS) $\lim_{-\infty} g = -\infty$ car $\frac{1}{2-x} \to 0^+$ et $\lim_{X \to 0^+} \ln X = -\infty$.

• (HS) $\lim_{2^-} g = +\infty$ car $\frac{1}{2-x} \to +\infty$ et $\lim_{X \to +\infty} \ln X = +\infty$.

D'où ASYMPTOTE verticale $\boxed{x = 2}$ (à gauche).

1°) $g'(x) = (\ln[u(x)])' = \frac{u'(x)}{u(x)}$ pour $u(x) = \frac{1}{2-x} > 0$ i.e. $x < 2$.

$u'(x) = -\frac{-1}{(2-x)^2} = \frac{1}{(2-x)^2} \Rightarrow g'(x) = \frac{\frac{1}{(2-x)^2}}{\frac{1}{2-x}} = \boxed{\frac{1}{2-x}} > 0$ sur $]-\infty ; 2[$

Donc g est bien STRICTEMENT CROISSANTE sur $]-\infty ; 2[$.

De plus $g(-2) = \ln\frac{1}{4} = -\ln 4 = -2\ln 2 \simeq -1,4$.

$g(0) = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2 \simeq -0,7$

x	$-\infty$		-2		0		2
$g'(x)$		+		+			‖
g	$-\infty$	↗	$-1,4$	↗	$-0,7$	↗ $+\infty$	‖

Comme $g \nearrow$, $-2 < x < 0 \Rightarrow g(-2) < g(x) < g(0)$

$\Rightarrow g(x) \in [-1,4 ; -0,7] \subset [-2 ; 0]$ CQFD.

2°.a) $(u_n) \begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$

$u_1 = g(u_0) = g(-2) = -1,4 \in I = [-2;0]$.

Soit (H_n) : $\boxed{-2 \leq u_n \leq 0}$ (*) (n fixé).

Alors par $g \nearrow$ $g(-2) \leq g(u_n) \leq g(0)$

$\Rightarrow -2 \leq -1,4 \leq u_{n+1} \leq -0,7 \leq 0 \Rightarrow (H_{n+1})$.

la proposition (*) est HEREDITAIRE et VRAIE pour $n=0$ (et pour $n=1$)

Donc par récurrence on peut affirmer que (*) est VRAI pour tout $n \geq 0$.

De même soit (H_n) : $\boxed{u_n \leq u_{n+1}}$ Alors • INIT° : $u_0 = -2 \leq u_1 = -1,4$ OK

• hérédité : $g \nearrow$ sur $[-2;0]$ et $u_n \in [-2;0]$ (montré + haut) $\Rightarrow g(u_n) \leq g(u_{n+1}) \Rightarrow u_{n+1} \leq u_{n+2}$ (H_{n+1}).

Donc $u_n \leq u_{n+1}$ VRAI pour tout $n \geq 0$ (par récurrence sur n).

c'est à dire que (u_n) est une suite CROISSANTE.

2°.b) $(v_n) \begin{cases} v_0 = 0 \\ v_{n+1} = g(v_n) \end{cases}$

$v_1 = g(v_0) = g(0) = -0,7 \in I = [-2;0]$. $\Rightarrow v_1 \leq 0$.

Donc $-2 \leq u_1 \leq v_1 \leq v_0 \leq 0$. car $u_1 = -1,4 \leq -0,7 = v_1$.

(H_n) : $\boxed{-2 \leq u_n \leq v_n \leq v_{n-1} \leq 0}$

INIT° OK (voir ci-dessus) pour $n=1$.

HEREDITE : comme $g \nearrow$ sur $[-2;0]$

et que $u_n ; v_n ; v_{n-1}$ sont par Hyp. dans $I = [-2;0]$ Alors :

$g(-2) \leq g(u_n) \leq g(v_n) \leq g(v_{n-1}) \leq g(0) \Rightarrow \underline{-2 \leq -1,4 \leq u_{n+1} \leq v_{n+1} \leq v_n \leq -0,7 \leq 0}$ (H_{n+1}).

Par suite (H_n) est VRAI pour tout $n \geq 1$ (par récurrence sur n).

en particulier $\boxed{v_{n+1} \leq v_n}$ pour tout $n \geq 0$ donc (v_n) DECROISSANTE.

PROBLÈME [C] 3°) a) $\boxed{m(x) = x - \ln(1+x)}$ $(x \geq 0)$.

$m'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{x+1} \geq 0$ sur $[0;+\infty[$.

x	0	$+\infty$
m	0	⊕ ↗

Donc $m \nearrow$ sur $[0;+\infty[$ or $m(0) = 0 - \ln 1 = 0 - 0 = 0$

Par suite $m(x) \geq 0$ sur $[0;+\infty[$, i.e. $x - \ln(1+x) \geq 0$

i.e $\boxed{x \geq \ln(1+x)}$ sur $[0;+\infty[$ CQFD.

b) $v_{n+1} - u_{n+1} = \ln\left(\frac{1}{2-v_n}\right) - \ln\left(\frac{1}{2-u_n}\right) = -\ln(2-v_n) + \ln(2-u_n)$ $\begin{cases} u_n < 2 \\ v_n < 2 \end{cases}$

$\Rightarrow v_{n+1} - u_{n+1} = \ln\left[\frac{2-u_n}{2-v_n}\right] = \ln\left[\frac{2-v_n+v_n-u_n}{2-v_n}\right] = \ln\left(1 + \frac{v_n-u_n}{2-v_n}\right)$.

en posant alors $X = \frac{v_n-u_n}{2-v_n}$ on a $\ln(1+X) \leq X$

car $X = \frac{v_n-u_n}{2-v_n} > 0$.

Donc $\boxed{v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{v_n-u_n}{2-v_n}}$.

• $-2 \leq v_n \leq 0 \Rightarrow 0 \leq -v_n \leq 2 \Rightarrow 2 \leq 2-v_n \leq 4 \Rightarrow \frac{1}{4} \leq \frac{1}{2-v_n} \leq \frac{1}{2}$

Par suite $\frac{v_n-u_n}{2-v_n} = \frac{1}{2-v_n}(v_n-u_n) \leq \frac{1}{2}(v_n-u_n)$

et donc $\boxed{v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(v_n-u_n)}$. qq soit $n \geq 0 \Rightarrow v_n - u_n \leq \frac{1}{2}(v_{n-1}-u_{n-1})$

et donc par récurrence immédiate : $v_n - u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2(v_{n-2}-u_{n-2}) \leq \overset{(*)}{\cdots} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n(v_0-u_0)$.

(*) on peut aussi poser : (H_n) $\boxed{v_n - u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n(v_0-u_0)}$

et montrer immédiatement que $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(v_n-u_n) \leq \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n(v_0-u_0)$

c'est à dire (H_{n+1}) : $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}(v_0-u_0)$.

• pour $n=1$ $v_1 - u_1 \leq \frac{1}{2}(v_0-u_0)$ est VRAI car $v_1 - u_1 = 0{,}7 \leq \frac{1}{2}(0+2) = 1$.

Conclusion : comme $0 \leq v_n - u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n(v_0-u_0)$

par passage à la limite on a : $0 \leq \lim(v_n-u_n) \leq \lim\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n(v_0-u_0)\right] = 0$.

$\Rightarrow$ $\boxed{\lim(v_n-u_n) = 0}$. En résumé $(u_n) \nearrow$; $(v_n) \searrow$ et $u_n \leq v_n$

avec $\lim(v_n-u_n) = 0$ donc (u_n) et (v_n) sont ADJACENTES.

elles sont donc CONVERGENTES vers une même limite : ℓ.

De plus (H3) $u_{n+1} = g(u_n) \Rightarrow \lim(u_{n+1}) = g(\lim u_n)$ car g CONTINUE

$\Rightarrow \ell = g(\ell) \Leftrightarrow \ell = \ln\frac{1}{2-\ell} \Leftrightarrow e^\ell = \frac{1}{2-\ell} \Leftrightarrow (2-\ell)e^\ell - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \ell$ solution dans $[-2;0]$ de l'équation $\varphi(x) = 0 \Rightarrow$ $\boxed{\ell = \alpha \simeq -1{,}15}$ (à 10^{-2} près)

4°) $-1{,}1462 \leq u_{10} \leq -1{,}1461$ et $-1{,}1461 \leq v_{10} \leq -1{,}1460$ $\Rightarrow \ell \simeq -1{,}1461$ à 10^{-4} près ∎