jml@ecole-alsacienne.org
2004-2005

Fonctions Exponentielle et Logarithme • Dérivées • TVI • Suites • Nb Complexes

[Calculatrices autorisées]

EXERCICE 1

Le plan complexe est rapporté au repère $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. On prendra pour unité graphique 2 cm.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$(z-2i)(z^2-2z+2)=0\,.$$

Donner les solutions sous forme algébrique et sous forme exponentielle (justifier les réponses). **[1 pt]**

2. Soient A et B les points d'affixes respectives $z_A = 1+i$ et $z_B = 2i$.

À tout complexe z différent de A on associe le complexe $z' = \dfrac{z-2i}{z-1-i}$.

a. Soit (E) l'ensemble des points M d'affixe z tels que z' soit imaginaire pur.
Montrer que $B \in (E)$.
Déterminer et construire l'ensemble (E). **[1 pt]**

b. Soit (F) l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z'| = 1$.
Déterminer et construire (F). **[1 pt]**

3. Soit R la rotation de centre $\Omega\left(\dfrac{3}{2}\,;\dfrac{5}{2}\right)$ et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

a. Calculer l'affixe du point B', image de B par R et l'affixe du point I', image par R du point $I\left(\dfrac{1}{2}\,;\dfrac{3}{2}\right)$. **[1 pt]**

b. Quelles sont les images de (E) et (F) par R ? **[1 pt]**

EXERCICE 2

On désigne par f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et par f' sa fonction dérivée. Ces fonctions vérifient les propriétés suivantes :
(1) pour tout nombre réel x, $(f'(x))^2-(f(x))^2=1$,
(2) $f'(0)=1$,
(3) la fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. a. Démontrer que, pour tout nombre réel x, $f'(x)\neq 0$. **[0,5 pt]**
b. Calculer $f(0)$. **[0,5 pt]**

2. En dérivant chaque membre de l'égalité de la proposition (1), démontrer que :
(4) pour tout nombre réel x, $f''(x)=f(x)$, où f'' désigne la fonction dérivée seconde de la fonction f. **[0,5 pt]**

3. On pose $u=f'+f$ et $v=f'-f$.
a. Calculer $u(0)$ et $v(0)$. **[0,5 pt]**
b. Démontrer que $u'=u$ et $v'=-v$. **[0,5 pt]**
c. En déduire les fonctions u et v. **[1 pt]**
d. En déduire que, pour tout réel x, $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$. **[0,5 pt]**

4. a. Étudier les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.
b. Dresser le tableau de variation de la fonction f. **[1 pt]**

5. a. Soit m un nombre réel. Démontrer que l'équation $f(x)=m$ a une unique solution α dans $\mathbb{R}$.

TSVP →

jml@ecole-alsacienne.org
2004-2005

Fonctions Exponentielle et Logarithme • Dérivées • TVI • Suites • Nb Complexes

[Calculatrices autorisées]

PROBLÈME

Partie A : Étude préliminaire d'une fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = (2-x)e^x - 1$

1. Déterminer les limites de la fonction φ en $-\infty$ et $+\infty$. **[0,5 pt]**

2. Montrer que la fonction φ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et étudier le signe de sa dérivée.
En déduire les variations de la fonction φ et préciser les valeurs de $\varphi(-2)$, $\varphi(0)$, $\varphi(1)$ et $\varphi(2)$. **[0,5 pt]**

3. Prouver que la fonction φ s'annule uniquement en deux valeurs que l'on nommera α et β. On prendra $\alpha < \beta$. Étudier alors le signe de la fonction φ sur l'ensemble des réels et récapituler cette étude dans un tableau. **[0,5 pt]**

4. À l'aide de la calculatrice, fournir un encadrement d'amplitude 10^{-2} des valeurs α et β. **[0,5 pt]**

5. Montrer que $e^{\alpha} = \dfrac{1}{2-\alpha}$. **[0,5 pt]**

Partie B : Étude d'une fonction f définie par $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x - x}$

1. Montrer que $e^x - x$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. En déduire que f est définie sur $\mathbb{R}$. **[0,5 pt]**

2. Déterminer les limites de la fonction f en $-\infty$ et $+\infty$. **[0,5 pt]**

3. Calculer la dérivée f' de la fonction f puis, à l'aide des résultats de la partie **A**, construire le tableau des variations de f. **[0,5 pt]**

4. Montrer que $f(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha - 1}$, le nombre α étant la plus petite des deux valeurs pour lesquelles la fonction φ de la partie **A** s'annule. **[0,5 pt]**

Partie C : Étude de deux suites

1. Préciser l'ensemble de définition D_g de la fonction g définie sur cet ensemble par $g(x) = \ln\left(\dfrac{1}{2-x}\right)$ où ln désigne sa fonction logarithme népérien.
Prouver que la fonction g est croissante sur son ensemble de définition et que l'image par g de l'intervalle $I = [-2\,;\,0]$ est incluse dans cet intervalle. **[1 pt]**

2. a. Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $\begin{cases} \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$.
Montrer que u_1 appartient à l'intervalle $I = [-2\,;\,0]$. Prouver par récurrence, à l'aide des variations de la fonction g, que la suite (u_n) a tous ses termes dans l'intervalle I et est croissante. **[1 pt]**

b. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} v_0 = 0 \\ v_{n+1} = g(v_n) \end{cases}.$$

Calculer le terme v_1 et montrer que $-2 \leqslant u_1 \leqslant v_1 \leqslant v_0 \leqslant 0$.
Établir par récurrence, à l'aide de la croissance de la fonction g sur l'intervalle $[-2\,;\,0]$, que pour tout entier naturel n strictement positif, on a :

$$-2 \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant v_{n-1} \leqslant 0.$$

Préciser le sens de variation de la suite (v_n). **[1 pt]**

3. a. Soit m la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $m(x) = x - \ln(1+x)$.
Montrer que m est croissante et calculer $m(0)$. En déduire que, pour tout x positif, on a :

$$\ln(1+x) \leqslant x.$$ **[0,5 pt]**

b. Vérifier que, pour tout entier n :

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \ln\left(1 + \frac{v_n - u_n}{2 - v_n}\right).$$

En déduire que :

$$v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant \frac{v_n - u_n}{2 - v_n}.$$

Sachant que, pour tout entier n, les termes de la suite (v_n) appartiennent à l'intervalle $[-2\,;\,0]$, donner un encadrement de $\dfrac{1}{2-v_n}$ et établir que :

$$v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}(v_n - u_n).$$

Prouver alors que, pour tout entier naturel n :

$$v_n - u_n \leqslant \frac{1}{2^n}(v_0 - u_0).$$

Que peut-on en déduire pour la suite de terme général $v_n - u_n$ et pour les suites (u_n) et (v_n) ? **[1,5 pt]**

4. Donner, à l'aide de la calculatrice, un encadrement d'amplitude 10^{-4} de u_{10} et v_{10}. **[0,5 pt]**

TSVP