I. $\boxed{f(x) = 1 + \frac{1-x}{\sqrt{1+x^2}}}$ $D_f =]-\infty ; +\infty[$ car $x^2+1>0$ sur $\mathbb{R}$. TS4/C3/23.11.0

$\boxed{\lim_{-\infty} f = 2^+}$ car pour $x<0$ $\sqrt{x^2}=|x|=-x$ $\frac{1-x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{x\left[-1+\frac{1}{x}\right]}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \frac{x\left(-1+\frac{1}{x}\right)}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \frac{1-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} \to 1^+$ $(x \to$

$\boxed{\lim_{+\infty} f = 0^+}$ car pour $x>0$ $\sqrt{x^2}=|x|=+x$. $\frac{1-x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{x\left(-1+\frac{1}{x}\right)}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \frac{-1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} \longrightarrow -1^-$ $(x \to +$

D'où les ASYMPTOTES "Horizontales" $y=2$ en $-\infty$ et $y=0$ en $+\infty$.

2°) f DÉRIVABLE sur $\mathbb{R}$ car $1+x^2$ toujours strictement positif et $\left(\sqrt{1+x^2}\right)' = \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} =$

$f'(x) = \left[-\sqrt{1+x^2} - (1-x)\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right]\frac{1}{1+x^2} = \left[-\frac{(1+x^2)+x^2-x}{\sqrt{1+x^2}}\right] \times \frac{1}{1+x^2}$

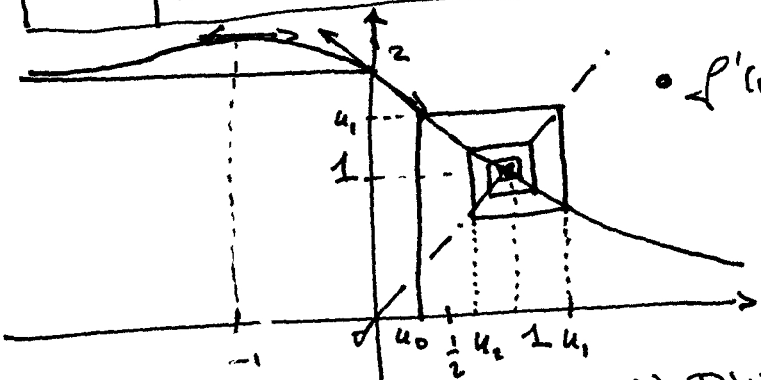
$\Rightarrow \boxed{f'(x) = -\frac{1+x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}} \Rightarrow \text{Sgn}[f'(x)] = -\text{Sgn}[1+x]$.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	−		
f	2 ↗	2,4 ↘	2	1	↘ 0

$f(-1) = 1 + \frac{2}{\sqrt{2}} = 1+\sqrt{2} \simeq 2{,}4$; $f(0) = 2$

Point fixe : $f(x) = x \iff x = 1 + \frac{1-x}{\sqrt{1+x^2}}$

$\iff (1-x)\left[1 + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right] = 0 \iff \boxed{x=1}$ car $[\sim] \neq 0$.



• $f'(0) = -1 \Rightarrow$ Tgte en $(0;2)$: $\boxed{y = -x+2}$

SUITE RÉCURRENTE ASSOCIÉE à f :

$u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 \in]0 ; \frac{1}{2}[$.

a) Soit (H_n) $\boxed{u_0 \le u_n \le 2}$

i) INITIALISATION : (H_0) $u_0 \le u_0 \le 2$ VRAI.

ii) HÉRÉDITÉ : Sur $[0;2]$ la fonction f est ↘

Donc $\boxed{u_0 \le u_n \le 2} \Rightarrow f(u_0) \ge f(u_n) \ge f(2)$.

$\Downarrow$

Or $f(2) = 1 - \frac{1}{\sqrt{5}} \simeq 0{,}55 > 0{,}50 > u_0$

et $f(u_0) < 2$ car sur $[0;+\infty[$ on a f ↘ de 2 à 0^+. $\boxed{2 \ge u_{n+1} \ge u_0}$

iii) Par récurrence on peut donc affirmer que (H_n) est VRAIE pour tout $n \ge 0$.

b) $|u_{n+1} - 1| = \left|\frac{1-u_n}{\sqrt{1+u_n^2}}\right| = \frac{1}{\sqrt{1+u_n^2}}|u_n - 1|$ mais d'après a) $u_0 \le u_n$ donc $\sqrt{1+u_0^2} \le \sqrt{1+u_n^2} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1+u_n^2}} \le \frac{1}{\sqrt{1+u_0^2}}$

$\Rightarrow |u_{n+1} - 1| \le \frac{1}{\sqrt{1+u_0^2}}|u_n - 1|$. CQFD. pour tout $n \ge 0$

c) $|u_1 - 1| \le k|u_0 - 1|$ avec $|k| = \frac{1}{\sqrt{1+u_0^2}} < 1 \Rightarrow k^n \longrightarrow 0$.

$|u_2 - 1| \le k|u_1 - 1|$

. . . .

$|u_n - 1| \le k|u_{n-1} - 1|$

$|u_n - 1| \le k^n|u_0 - 1|$

donc $0 \le |u_n - 1| \le k^n |u_0 - 1|$

$\Rightarrow 0 \le \lim |u_n - 1| \le 0$

$\Rightarrow \lim |u_n - 1| = 0 \Rightarrow \boxed{\lim u_n = 1}$ CQFD.

| TS4 | C3 | 23.11.0

II - φ définie, continue, dérivable sur $\mathbb{R}$.
($\varphi(x)$ non explicité, mais $\varphi'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ et $\varphi(0) = 0$.

(2)

$u(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \varphi(x)$
$v(x) = \varphi(x) - x + \frac{x^3}{3}$
$\Rightarrow$ $u'(x) = 1 - x^2 + x^4 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^6}{1+x^2} >$
$v'(x) = \frac{1}{1+x^2} - 1 + x^2 = \frac{x^4}{1+x^2} > 0$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$u'(x)$	$+$	0	$+$
$u(x)$	$\ominus$ ↗	0	↗ $\oplus$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$v'(x)$	$+$	0	$+$
$v(x)$	$\ominus$ ↗	0	↗ $\oplus$

Donc $u(x) \geq 0$ et $v(x) \geq 0$ | si

Par suite on a les inégalités : $\begin{cases} x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \varphi(x) \geq 0 \\ \varphi(x) - x + \frac{x^3}{3} \geq 0 \end{cases}$ | dom $x \geq$

d'où $\boxed{x - \frac{x^3}{3} \leq \varphi(x) \leq x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}}$ dom $x \geq 0$.

* dom $x \leq 0$ on aurait : $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \leq \varphi(x) \leq x - \frac{x^3}{3}$.

En particulier $\varphi(0{,}5) =$ $\quad 0{,}5 - \frac{(0{,}5)^3}{3} \leq \varphi(0{,}5) \leq 0{,}5 - \frac{(0{,}5)^3}{3} + \frac{(0{,}5)^5}{5}$

Donc $\varphi(0{,}5) = 0{,}46$ à 10^{-2} près par excès $\boxed{0{,}458 \leq \varphi(0{,}5) \leq 0{,}464}$

III - $\boxed{\begin{aligned} Sh\,x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ Ch\,x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \end{aligned}}$

1°) ∘ $Sh(-x) = \frac{e^{-x} - e^{+x}}{2} = -Sh(x)$.
∘ $Ch(-x) = \frac{e^{-x} + e^{+x}}{2} = Ch\,x$. | CQFD.

2°) ∘ $\lim\limits_{+\infty} e^x = +\infty$
∘ $\lim\limits_{+\infty} e^{-x} = 0^+$
$\Rightarrow \lim\limits_{+\infty} Sh\,x = +\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} Ch\,x = +\infty$.

et par symétrie : $\lim\limits_{-\infty} Sh\,x = \lim\limits_{-\infty} [-Sh(-x)] = -\infty$
$\lim\limits_{-\infty} Ch\,x = \lim\limits_{-\infty} Ch(-x) = +\infty$.

car si $x \to -\infty$ alors $(-x) \to +\infty$.

3°) $Sh'(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = Ch\,x$.
$Ch'(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = Sh\,x$ | CQFD.

4°) $Ch\,x > 0$ sur $\mathbb{R}$ car e^x et e^{-x} strictement positifs sur $\mathbb{R}$

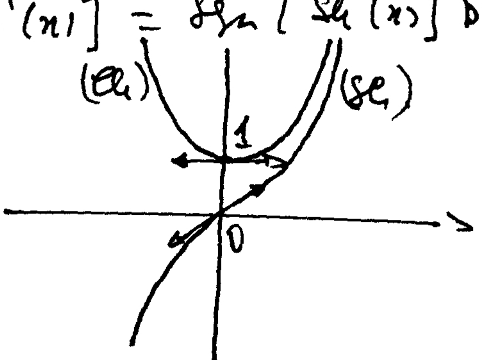
$\Rightarrow Sh'(x) > 0 \Rightarrow Sh$ ↗ sur $\mathbb{R}$.
avec $Sh(0) = 0$

Donc $Sh(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$.

$Sgn[Ch'(x)] = Sgn[Sh(x)]$ D'où le tableau :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$Sh'(x)$	$+$	1	$+$
Sh	$-\infty$ ↗ $\ominus$	0	$\oplus$ ↗ $+\infty$
Ch	$+\infty$ ↘	1	↗ $+\infty$

5°)



6°) $Ch^2 x - Sh^2 x = \frac{1}{4}\left[(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2\right]$
$(\bullet\ e^x \cdot e^{-x} = e^0 = 1.)$ $= \frac{1}{4}(2e^x \cdot e^{-x} + 2e^x e^{-x})$
$= \frac{1}{4}(2+2) = 1$

CQFD

III - [B] $\begin{cases} e^{ix} = \cos x + i\sin x \\ e^{-ix} = \cos(-x) + i\sin(-x) = \cos x - i\sin x. \end{cases}$

a) $\Rightarrow \begin{cases} e^{ix} + e^{-ix} = 2\cos x \Rightarrow ch(ix) = \dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} = \cos x. \\ e^{ix} - e^{-ix} = 2i\sin x \Rightarrow sh(ix) = \dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2} = i\sin x. \end{cases}$ | CQFD

b) $\Rightarrow ch^2(ix) - sh^2(ix) = \cos^2 x - i^2\sin^2 x = \cos^2 x + \sin^2 x = 1.$

c) $ch(a+b) = \dfrac{e^{a+b} + e^{-a-b}}{2}$ Rappel: $\boxed{e^{a+b} = e^a \cdot e^b}$

$ch\,a \cdot ch\,b = \frac{1}{4}(e^a+e^{-a})(e^b+e^{-b}) = \frac{1}{4}(e^{a+b} + e^{a-b} + e^{b-a} + e^{-a-b})$

$sh\,a \cdot sh\,b = \frac{1}{4}(e^a-e^{-a})(e^b-e^{-b}) = \frac{1}{4}(e^{a+b} - e^{b-a} - e^{a-b} + e^{-a-b})$

$\Rightarrow ch\,a\,ch\,b + sh\,a\,sh\,b = \frac{1}{4}(2e^{a+b} + 2e^{-a-b}) = \dfrac{e^{a+b}+e^{-a-b}}{2}$ CQFD

d) $ch\,2x = ch(x+x) = ch\,x \cdot ch\,x + sh\,x \cdot sh\,x = ch^2 x + sh^2 x = 2ch^2 x$

car on a montré que $ch^2 x - sh^2 x = 1 \Rightarrow sh^2 x = ch^2 x - 1$.

IV - $\boxed{f(x) = \frac{1}{2}[x + (1-x)e^{2x}]}$ $D_f =]-\infty;+\infty[$

$\begin{cases} \lim\limits_{-\infty} e^{2x} = 0^+ \\ \lim\limits_{\pm\infty}\left(\frac{1}{x}-1\right) = -1 \\ \lim\limits_{+\infty} e^{2x} = +\infty. \end{cases}$

∘ $\lim\limits_{-\infty} f = -\infty$

∘ $\lim\limits_{+\infty} f = -\infty$

| Démos: $f(x) = \frac{x}{2}\left[1 + \left(\frac{1}{x}-1\right)e^{2x}\right]$.

Donc $\lim\limits_{-\infty} f(x) = \lim\limits_{-\infty} \frac{x}{2} = -\infty$.

et $\lim\limits_{+\infty}\left[1 + \left(\frac{1}{x}-1\right)e^{2x}\right] = -\infty$.

b) (Δ) ASYMPTOTE à $(\mathcal{C})$ (en $-\infty$) $\Longleftrightarrow \lim\limits_{-\infty}\left[f(x) - \frac{x}{2}\right] = 0$.

or $f(x) - \frac{x}{2} = \frac{1}{2}(1-x)e^{2x} = \frac{e^{2x}}{2} - \frac{x}{2}e^{2x} = \frac{e^{2x}}{2} - \frac{1}{4}(2x)e^{2x} \to 0.$

en posant $X = 2x$ on a donc $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x\,e^{2x} = \lim\limits_{X\to-\infty} X e^X = 0^+$.

et $e^{2x} = e^X \to 0^+$.

et pour $x < 0$ $1-x > 0 \Rightarrow f(x) - \frac{x}{2} > 0 \Rightarrow (\mathcal{C})$ au dessus de (Δ).

2°) $f'(x) = \frac{1}{2}[1 + -e^{2x} + (1-x)\cdot 2\cdot e^{2x}] = \frac{1}{2}[e^{2x} - 2x e^{2x} + 1] = \boxed{\frac{1}{2}u(x)}$

avec $u(x) = 1 + (-2x+1)e^{2x}$.

3°) $u'(x) = -2e^{2x} + (-2x+1)\cdot 2e^{2x} = -4x e^{2x} \Rightarrow Sgn(u'(x)) = Sgn(-x)$.

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$u'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	
u	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

$u(0) = 2$

∘ $\lim\limits_{+\infty} u(x) = -\infty$

∘ $\lim\limits_{-\infty} u(x) = 1$

| car on a montré + haut que $\lim\limits_{-\infty} 2x e^{2x} = 0$.

Par suite $u(x)$ change de signe sur l'intervalle $[0;+\infty[$ .../...

Donc il existe $\alpha > 0$ / $u(\alpha) = 0$

IV [fin] 3°b) la fonction $\boxed{u}$ est CONTINUE (car dérivable) et strictement MONOTONE (décroissante) sur $[0;1]$. De plus $u(x)$ change de signe sur cet intervalle. | TS4 / C3 / 23.11.04 (4)

Donc il existe α unique, $\alpha \in [0;1]$ tel que $u(\alpha) = 0$.

Par DICHOTOMIE on obtient un encadrement de α à 10^{-2} près à l'aide la calculatrice : $u(0) = 2$; $u(1) = 1 - e^2 \simeq -6,3 \Rightarrow \alpha \in]0;1[$.

$u(0) = 2$; $u(0,5) = 1 - 0 = 1 \Rightarrow \alpha \in]0,5;1[$.

$u(0,75) = -0,06$; $u(0,50) = 1 \Rightarrow \alpha \in]0,50;0,75[$.

$u(0,625) = 0,53$; $u(0,750) = -0,06 \Rightarrow \alpha \in]0,625;0,750[$.

$u(0,630) = +0,08$; $u(0,640) = -0,007 \Rightarrow \alpha \in]0,630;0,640[$

Donc la valeur de α à 10^{-2} près par excès est $\boxed{0,64}$.

D'après le tableau de variations de u on peut donc affirmer que $u(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \alpha$ (et donc $u(x) < 0 \Leftrightarrow x > \alpha$).

4°) a)

x	$-\infty$	0	α	β	$+\infty$
$f'(x)$	+		0	−	
f	$-\infty \nearrow$	0,5	M	$\searrow$ 0	$-\infty$

$M = f(\alpha) \simeq f(0,64) \simeq 0,96 \simeq 1 > 0$

• f étant CONTINUE et STRICTEMENT DÉCROISSANTE sur $[\alpha;+\infty[$, f réalise une BIJECTION de $[\alpha;+\infty[$ sur $]-\infty;M]$, et comme $0 < M$ il existe β unique ANTÉCÉDENT de 0 sur $[\alpha;+\infty[$.

Pour déterminer β on procède également par dichotomie :

$f(0,64) > 0$; $f(1) = 0,5$; $f(2) = -0,76$; ....

$f(1,11) = 0,048 > 0$; $f(1,12) = -0,003 < 0 \Longrightarrow \beta \in]1,12;1,13[$.

Donc $\beta = 1,13$ à 10^{-2} près par excès.