Fonctions Continues • Dérivées • TVI • Suites • Nb Complexes

[Calculatrices autorisées]

I – [6 pts] Soit f la fonction numérique définie par $f(x) = 1 + \dfrac{1 - x}{\sqrt{1 + x^2}}$

1°) Indiquer son ensemble de définition et calculer les limites aux bornes ; en déduire les asymptotes éventuelles.
2°) Calculer la dérivée de f et dresser le tableau des variations.
3°) Montrer que la fonction f admet un point fixe unique que l'on déterminera.
4°) Tracer la courbe de f, ses asymptotes et la tangente en (0;2) dans un repère orthonormé(unité =4cm).
5°) On pose $u_{n+1} = f(u_n)$ et on suppose u_0 fixé dans l'intervalle]0;0,5[.

a) Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 0$, on a $u_0 \leq u_n \leq 2$

b) En déduire que pour tout $n \geq 0$, on a $|u_{n+1} - 1| \leq \dfrac{1}{\sqrt{1 + u_0^2}} |u_n - 1|$

c) En déduire par récurrence immédiate que pour tout $n \geq 0$,
on a $|u_n - 1| \leq k^n |u_0 - 1|$ avec $k = \dfrac{1}{\sqrt{1 + u_0^2}}$

d) En déduire la limite de (u_n).

II – [3 pts] Soit φ une fonction numérique définie, continue et dérivable sur R, telle que

$$\varphi'(x) = \frac{1}{1 + x^2} \qquad \text{et} \qquad \varphi(0) = 0$$

On pose $u(x) = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \varphi(x)$ et $v(x) = \varphi(x) - x + \dfrac{x^3}{3}$

1°) Etudier les variations des fonctions u et v et en déduire le signe sur R+
2°) En déduire que la fonction φ vérifie l'encadrement suivant pour tout $x \geq 0$

$$x - \frac{x^3}{3} \leq \varphi(x) \leq x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}$$

3°) En déduire un encadrement de φ(0,5).

III- [5 pts] Fonctions Sinus et Cosinus Hyperbolique On considère les deux fonctions notées Sh et Ch définies par

$$Sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \text{et} \qquad Ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

A – Étude Analytique dans R

1°) Montrer que la fonction Sh est impaire et que Ch est paire.
2°) Calculer la limite de Sh et de Ch en $+\infty$ et en déduire leur limite en $-\infty$.
3°) Démontrer que Sh'(x) = Ch(x) et que Ch'(x) = Sh(x).
4°) Étudier les variations de Sh puis celle de Ch
5°) Construire les courbes (S_h) et (C_h) dans le même repère orthonormal d'unité 2cm
6°) Démontrer que $Ch^2(x) – Sh^2(x) = 1$

B – Étude Analytique dans C

Soit z le nombre complexe z = Cos x + i. Sin x noté e^{ix} pour tout x Réel,
a) Montrer que, pour tout x Réel, Ch(ix) = Cos x et Sh(ix) = i. Sin x
b) En déduire $Ch^2(ix) – Sh^2(ix)$
c) Démontrer que Ch(a).Ch(b) + Sh(a).Sh(b) = Ch(a+b)
d) En déduire que $Ch(2x) = 2\,Ch^2(x) –1$

IV- [6 pts] On considère la fonction f définie sur R par $f(x) = \frac{1}{2}[\, x + (1 - x)e^{2x}\,]$. On note © sa courbe représentative dans un repère orthonormal d'unité 2cm ou 2 carreaux.

1°) a) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
b)Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = \dfrac{1}{2}x$ est asymptote à la courbe © en $-\infty$. Préciser leur position relative.
[NB : Pour lever l'indétermination on pourra poser X = 2x]
2°) Montrer que f est dérivable sur R et calculer sa dérivée f '(x) *[Rappel : $(e^u)'(x) = u'(x).e^{u(x)}$]*
3°) Soit u la fonction auxiliaire définie par $u(x) = 1 + (-2x + 1)e^{2x}$
a) Etudier le sens des variatons de u.
b) Montrer que l'équation u(x) =0 possède une solution unique α dans l'intervalle [0 ; 1].
Déterminer une valeur décimale approchée par excès de α à 10^{-2} près.
c) Déterminer le signe de u(x) suivant les valeurs de x.
4°) a) Dresser le tableau des variations de f.
b) Démontrer que la courbe © coupe l'axe (x'x) en un point β unique sur l'intervalle [1 ;2] et déterminer β à 10^{-2} près par excès.
b) Tracer la courbe représentative de f.