IV. $\begin{cases} C_n = \cos^2\theta + \cos^2\theta \cos 2\theta + \dots + \cos^n\theta . \cos n\theta \\ S_n = \cos\theta \sin\theta + \cos^2\theta \sin 2\theta + \dots + \cos^n\theta . \sin n\theta . \end{cases}$

$$\Sigma_n = C_n + iS_n = \cos\theta(\cos\theta + i\sin\theta) + \cos^2\theta(\cos 2\theta + i\sin 2\theta) + \dots + \cos^n(\theta)(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

$$= \cos\theta . e^{i\theta} + \cos^2\theta . e^{2i\theta} + \dots + \cos^n\theta . e^{ni\theta} .$$

$$= \cos\theta . e^{i\theta} + [\cos\theta . e^{i\theta}]^2 + \dots + [\cos\theta . e^{i\theta}]^n = (\cos\theta e^{i\theta})[1 + \dots + (\cos\theta e^{i\theta})^{n-1}]$$

Σ_n est donc une SERIE <u>géométrique</u> de $\left| \begin{array}{l} 1^{er} \text{ terme } \cos\theta . e^{i\theta} = u_1 \\ \text{raison } \cos\theta . e^{i\theta} = q \end{array} \right.$

$$\Rightarrow \Sigma_n = (\cos\theta . e^{i\theta}) \frac{1 - (\cos\theta e^{i\theta})^n}{1 - \cos\theta . e^{i\theta}} . \quad \left[\text{Formule : } \Sigma_n = u_1 \frac{1-q^n}{1-q} \text{ (n termes)}\right]$$

C_n est la partie Réelle de Σ_n. On doit donc écrire Σ_n sous forme algébrique (ou "cartésienne").

On peut écrire $1 - \cos\theta e^{i\theta} = 1 - \cos^2\theta - i\cos\theta\sin\theta = \sin^2\theta - i\cos\theta\sin\theta$

$$= \sin\theta[\sin\theta - i\cos\theta] = \sin\theta\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}+\theta\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}+\theta\right)\right] = \sin\theta\, e^{i(-\frac{\pi}{2}+\theta)}$$
$$= -ie^{i\theta} . \sin\theta .$$

Donc $\dfrac{\cos\theta\, e^{i\theta}}{1 - \cos\theta\, e^{i\theta}} = \dfrac{\cos\theta\, e^{i\theta}}{\sin\theta\, e^{i(-\frac{\pi}{2}+\theta)}} = e^{+i\frac{\pi}{2}} . \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} = +i\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} .$

$$\Rightarrow \Sigma_n = +i\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\left[1 - \cos^n\theta(\cos n\theta + i\sin n\theta)\right] .$$

$$= \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\left[-(i^2)\cos^n\theta\sin n\theta + i(1 - \cos^n\theta\cos n\theta)\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{C_n = \frac{\cos^{n+1}\theta . \sin n\theta}{\sin\theta}} \quad \text{et} \quad S_n = \frac{\cos\theta - \cos^{n+1}\theta\cos n\theta}{\sin\theta}$$

<u>Ex</u> $C_3 = \cos^2\theta + \cos^2\theta\cos 2\theta + \cos^3\theta . \cos 3\theta = \dfrac{\cos^4\theta . \sin 3\theta}{\sin\theta} .$

[<u>NB</u> : l'intérêt de cette transformation est de pouvoir déterminer plus facilement les <u>zéros</u> et le <u>signe</u> des expressions du type C_n].