jml@ecole-alsacienne.org

Suites Numériques Réelles ou Complexes

I -[5 pts] Étude de la suite (Un) définie par $U_0 = 0$ et $U_{n+1} = \sqrt{3U_n + 4} = f(U_n)$ avec $f(x) = \sqrt{3x+4}$

A – Première méthode :

1°) Représenter graphiquement les premiers termes de la suite (U_n) dans un repère orthonormal (unité 2cm ou 2 carreaux). D'après la figure obtenue, la suite (U_n) est-elle monotone ? Bornée ? Convergente ?

2°) Démontrer que la fonction f admet un point fixe $\alpha > 0$ unique que l'on déterminera.

3°) Montrer par récurrence que quelque soit $n \in \mathbb{N}$, on a $0 \leq U_n \leq 4$

4°) Démontrer par récurrence que (U_n) est strictement croissante.

5°) En déduire que (U_n) converge et déterminer sa limite.

B – Deuxième méthode :

1°) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|U_{n+1} - 4| \leq 0{,}5\,|U_n - 4|$.

2°) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 \leq |U_n - 4| \leq 4.(0{,}5)^n$.

3°) En déduire la limite de (U_n).

II- [4 pts] <u>Étude de la suite défine par</u> $U_n = \dfrac{n^2}{2^n}$ pour tout entier $n > 0$.

A – On pose, pour tout entier $n > 0$, $V_n = \dfrac{U_{n+1}}{U_n}$

1°) Démontrer que $\lim (V_n) = \frac{1}{2}$.

2°) Démontrer que pour tout entier $n > 0$, $V_n > \frac{1}{2}$.

3°) Déterminer le plus petit entier N tel que si $n \geq N$, alors $V_n < \frac{3}{4}$.

4°) En déduire que si $n \geq N$, alors $U_{n+1} < \frac{3}{4} U_n$

B – On pose, pour tout entier $n \geq 5$, $S_n = U_5 + U_6 + \dots U_n$.
On se propose de montrer que la suite (S_n) est convergente.

1°) Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 5$, $U_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5} U_5$

2°) Démontrer que, pour tout entier $n \geq 5$, $S_n \leq \left[1 + \left(\frac{3}{4}\right) + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \dots + \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5}\right] U_5$

3°) En déduire que, pour tout entier $n \geq 5$, $S_n \leq 4U_5$.

4°) Montrer que (S_n) est croissante, en déduire qu'elle est convergente.
Que peut-on dire de sa limite ?

III - [6 pts] Le plan Complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ (Unité graphique 2 cm)
On appelle A_0 le point d'affixe 2, A'_0 le point d'affixe $2i$, et A_1 le milieu du segment $[A_0\,A'_0]$.
Plus généralement si A_n est le point d'affixe z_n, on désigne par A'_n le point d'affixe $i.z_n$ et par A_{n+1} le milieu du segment $[A_n\,A'_n]$. On note r_n et t_n le module et l'argument de z_n.

1°) a) Déterminer les affixes des points A_0, A'_0, A_1, A'_1, A_2, A'_2, A_3, et placer ces points sur la figure.
b) Calculer r_0, r_1, r_2, r_3, ainsi que les arguments t_0, t_1, t_2, t_3.

2°) a) Pour tout entier n, exprimer z_{n+1} en fonction de z_n. En déduire z_n en fonction de n.
b) Indiquer par quelles transformations géométriques successives on passe de A_n à A_{n+1}.
c) Déterminer les expressions de r_n et t_n en fonction de n.
d) Déterminer la limite de r_n. Interpréter géométriquement le résultat.
e) Comparer les modules et les arguments de z_n et de z_{n+8}.
Que peut-on en déduire pour les points A_n et A_{n+8} ?

3°) a) Établir que $A_n A_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} A_{n-1} A_n$.
b) Exprimer $A_n A_{n+1}$ en fonction de n.
c) Déterminer en fonction de n la longueur L_n de la ligne brisée $A_0 A_1 A_2 A_3 \dots A_n$
d) Déterminer la limite de L_n en cm.

IV - [5 pts] Soit n un entier strictement positif, et x un nombre Réel appartenant à l'intervalle $]0, \pi[$.

1°) a) Démontrer que $1 - e^{ix} \cos x = -i.e^{ix} \sin x$.
b) En déduire le module et un argument de $1 - e^{ix} \cos x$.
c) Montrer que $\dfrac{e^{ix} \cos x}{1 - e^{ix} \cos x}$ est un imaginaire pur que l'on calculera.

2°) On pose $C_n = \cos^2 x + \cos^2 x \cos 2x + \dots + \cos^p x \cos px + \dots + \cos^n x \cos nx$
$S_n = \cos x \sin x + \cos^2 x \sin 2x + \dots + \cos^p x \sin px + \dots + \cos^n x \sin nx$, et $\Sigma_n = C_n + i\,S_n$
a) Montrer que Σ_n est la somme des termes d'une suite géométrique complexe dont on donnera le premier terme et la raison.
b) En déduire la valeur de Σ_n puis de C_n en fonction de n et de x.
c) Montrer que $\cos^2 x + \cos^2 x \cos 2x + \cos^3 x \cos 3x = \dfrac{\cos^4 x \,.\, \sin 3x}{\sin x}$