Calculatrices autorisées

EXERCICE I [5 points]

1. a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2z + 2 = 0$.
   Préciser le module et un argument de chacune des solutions.
   b) En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation :
$$(-iz + 3i + 3)^2 - 2(-iz + 3i + 3) + 2 = 0.$$

2.Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité 2 cm ou 2 carreaux.

On considère les points A, B et C d'affixes respectives $Z_A = 1 + i$, $Z_B = \overline{Z_A}$, $Z_C = 2\,Z_B$.

a) Déterminer les formes algébriques de Z_B et Z_C.
b) Placer les points A, B et C.
c) Montrer que les points A, B et C appartiennent au cercle (C) de centre I d'affixe 3 et de rayon $\sqrt{5}$.
d) Calculer $\dfrac{Z_C - 3}{Z_A - 3}$ en déduire la nature du triangle IAC.
e) Le point E est l'image du point 0 par la translation de vecteur $2\,\overrightarrow{IC}$. Déterminer l'affixe du point E.
f) Le point D est l'image du point E par la rotation de centre 0 et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ .Déterminer l'affixe du point D.
g) Démontrer que les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

EXERCICE II [6 points]

Dans le plan complexe $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité 2 cm.**,**
on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives :

$$Z_A = -i, \quad Z_B = 3, \quad Z_C = 2 + 3i \quad \text{et} \quad Z_D = -1 + 2i.$$

1. Placer sur une figure les points A, B, C et D.
2. a. Interpréter géométriquement le module et l'argument du complexe : $\dfrac{Z_C - Z_A}{Z_D - Z_B}$
   b. Calculer le complexe $\dfrac{Z_C - Z_A}{Z_D - Z_B}$
   c. Que pouvez-vous conclure concernant les segments [AC] et [BD] ?
3. a. Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ? Justifier.
   b. Calculer l'aire s_0 du quadrilatère ABCD.
4. a. Placer sur la figure précédente les points A_1 B_1 C_1 et D_1 tels que $\overrightarrow{DA_1} = \overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{B_1C}$, où les points A_1 et B_1, appartiennent à [DC], le quadrilatère A_1 B_1 C_1 D_1 étant un carré situé à l'extérieur du quadrilatère ABCD.
   b. Tracer le carré A_1 B_1 C_1 D_1 et déterminer son aire s_1.
5. a. On continue par le même procédé : un carré $A_nB_nC_nD_n$ étant déterminé, on considère les points $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$., et D_{n+1} tels que $\overrightarrow{D_nA_{n+1}} = \overrightarrow{A_{n+1}B_{n+1}} = \overrightarrow{B_{n+1}C_n}$, où les points A_{n+1} et B_{n+1} appartiennent à $[D_nC_n]$, le quadrilatère $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}D_{n+1}$ étant un carré situé à l'extérieur du carré $A_nB_nC_nD_n$. Tracer le carré $A_nB_nC_nD_n$.
   b. Soit s_n l'aire du carré $A_nB_nC_nD_n$
      Exprimer s_{n+1} en fonction de s_n, puis de n.
      En déduire s_n en fonction de n.
   c. Déterminer, en fonction de n, l'aire S_n de la figure obtenue par la juxtaposition du quadrilatère ABCD et des carrés A_1 B_1 C_1 D_1 , A_2 B_2 C_2 D_2 ,…. et $A_nB_nC_nD_n$.
   d. La suite (S_n) est-elle convergente ? Préciser sa limite si elle existe.

Calculatrices autorisées

EXERCICE III [Q.C.M. fastoche 4 points]

Pour chaque question, une seule réponse est exacte. Chaque réponse juste rapporte 1 point. Une absence de réponse n'est pas sanctionnée. Il sera retiré 0,5 point par réponse fausse. On ne demande pas de justifier. La note finale de l'exercice ne peut être inférieure à zéro.

On pose $Z = -\sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

1. La forme algébrique de Z^2 est :

A. $2\sqrt{2}$ **B.** $2\sqrt{2} - 2i\sqrt{2}$ **C** . $(2+\sqrt{2}) + i(2-\sqrt{2})$ **D.** $2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}$

2. Z^2 s'écrit sous forme exponentielle :

A. $4\,e^{i\frac{\pi}{4}}$ **B.** $4\,e^{-i\frac{\pi}{4}}$ **C** . $4\,e^{i\frac{3\pi}{4}}$ **D.** $4\,e^{-i\frac{3\pi}{4}}$

3. Z s'écrit sous forme exponentielle :

A. $2\,e^{i\frac{7\pi}{8}}$ **B.** $2\,e^{i\frac{\pi}{8}}$ **C** . $2\,e^{i\frac{5\pi}{8}}$ **D.** $2\,e^{i\frac{3\pi}{8}}$

4. Les nombres Réels $\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ et $\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ sont les Cosinus et Sinus de :

A. $\frac{7\pi}{8}$ **B.** $\frac{5\pi}{8}$ **C** . $\frac{3\pi}{8}$ **D.** $\frac{\pi}{8}$

EXERCICE IV [5 points]

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct [O; $(\vec{u}, \vec{v})$] d'unité graphique 1 cm.

1°) Résoudre, dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation suivante :

$$z^2 - 8\sqrt{3}\,z + 64 = 0$$

2°) On considère les points A et B qui ont pour affixes respectives les nombres complexes

$$a = 4\sqrt{3} - 4i \quad \text{et} \quad b = 4\sqrt{3} + 4i$$

a) Écrire a et b sous forme exponentielle.
b) Calculer les distances OA, OB, AB. En déduire la nature du triangle OAB.
c)

3) On désigne par C le point d'affixe $c = -\sqrt{3} + i$ et par D son image par la rotation de centre 0 et d'angle $-\frac{\pi}{3}$. Déterminer l'affixe d du point D.

4) On appelle G le barycentre des trois points pondérés (O ; - 1), (D ; + 1), (B ; + 1).
a) Justifier l'existence de G et montrer que ce point a pour affixe $g = 4\sqrt{3} + 6i$.
b) Placer les points A, B, C, D et G sur une figure.
c) Montrer que les points C, D et G sont alignés.
d) Démontrer que le quadrilatère OBGD est un parallélogramme.

5) Quelle est la nature du triangle AGC ?