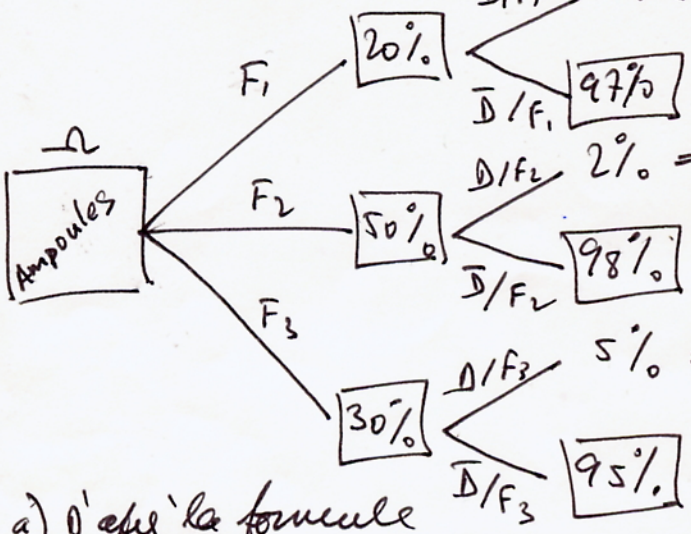
Ex. I PROBABILITÉS

1°) Univers : Ω = les 100 ampoules stockées.

F_i = "une ampoule provient du fabricant i"

D = "une ampoule est DEFECTUEUSE."



D/F_1 3% $\Rightarrow p(D \cap F_1) = \frac{3}{100} \times \frac{20}{100} = 0{,}006$

D/F_2 2% $\Rightarrow p(D \cap F_2) = \frac{2}{100} \times \frac{50}{100} = 0{,}010$

D/F_3 5% $\Rightarrow p(D \cap F_3) = \frac{5}{100} \times \frac{30}{100} = 0{,}015$

a) D'après la formule des PROBABILITÉS TOTALES :

$D = (D \cap F_1) \cup (D \cap F_2) \cup (D \cap F_3)$

événements INCOMPATIBLES 2 à 2.

$\Rightarrow p(D) = p(D \cap F_1) + p(D \cap F_2) + p(D \cap F_3)$

$= 0{,}006 + 0{,}010 + 0{,}015 = \boxed{0{,}031}$

$= 3{,}1\,\%$

b) $p_D(F_1) = p(F_1/D) = \frac{p(F_1 \cap D)}{p(D)} = \frac{0{,}006}{0{,}031} = \boxed{\frac{6}{31}} = 0{,}193$ ou $19{,}3\,\%$.

2°) Soit X la variable aléatoire qui donne le nombre d'ampoules DÉFECTUEUSES parmi les n ampoules tirés dans le stock : $p = 1 - q$

$P_n(X = k) = \binom{n}{k} p^k \cdot q^{n-k}$ avec $n = 12$ $p = 0{,}031$ $q = 0{,}969$ (donné)

Par suite $P_n(X \leq 1) = p(X = 0) + p(X = 1) = (0{,}031)^0 \times (0{,}969)^{12} + 12 \times (0{,}031)^1 \times (0{,}969)^{11}$

$= (0{,}969)^{12} + 12 \times 0{,}031 \times 0{,}969^{11} = 0{,}685 + 0{,}263 = \boxed{0{,}948}$

3°) $p(T \leq x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t}\,dt = \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^x = 1 - e^{-\lambda x}$ $\lambda = \frac{1}{50000}$

a) $P_1 = p(T > 25000) = 1 - p(T \leq 25000) = 1 - (1 - e^{-\lambda 25000}) = \boxed{e^{-\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{e}} \simeq 60\%$

b) $P_2 = p(T > 50000) = 1 - p(T \leq 50000) = 1 - (1 - e^{-\lambda 50000}) = \boxed{e^{-1}} = \frac{1}{e} \simeq 37\%$

c) $P_3 = p[(T > 50000)/(T > 25000)] = \frac{p[(T > 50000) \cap (T > 25000)]}{p(T > 25000)}$

Or les événements $(T > 50000)$ et $(T > 25000)$ sont inclus l'un dans l'autre : car les ampoules qui durent plus de 50000 heures sont parmi celles qui durent plus de 25000 heures. Donc $(T > 50000) \cap (T > 25000) = (T > 50000)$

Par suite $P_3 = \frac{P_2}{P_1} = \frac{e^{-1}}{e^{-1/2}} = e^{-1/2} = P_1$

Ex. II . EQUATIONS DIFFERENTIELLES

(du 1er ORDRE, linéaire, à coeff. constant, avec ou sans 2nd membre).

I. R.O.C. | Soit E l'ensemble des solutions de l'éq. diff. $\boxed{y' = y}$.
on suppose PREREQUIS que $x \mapsto e^x$ est solution de E.

m.q. il n'y a qu'une seule fonction $u \in E$, telle que $u(0) = 1$.

• Remarque préliminaire : la fonction Exp : $x \mapsto e^x$ vérifie bien cette propriété : $\text{Exp}' = \text{Exp}$ et $\text{Exp}(0) = 1$
mais il faut ici démontrer qu'il n'y en a pas d'autre dans E.

1ère étape : si l'on suppose comme la solution générale de l'équation $y' = y$, à savoir $y = Ke^x$ avec K Réel qcq, alors on voit immédiatement que la condition $y(0) = 1 \iff Ke^0 = 1 \iff K = 1 \Rightarrow y = e^x$.

2e étape : montrons que l'équation $y' = y$ a bien pour sol. générale $y = Ke^x$.
en effet si l'on pose $h(x) = K(x)e^x$, montrons alors que $h(x)$ ne peut être solution dans E sans que $K(x)$ soit une constante :

$h'(x) = h(x) \iff K'(x) \cdot e^x + K(x)e^x = K(x)e^x \iff K'(x)e^x = 0 \iff K'(x) = 0 \iff K(x) = C^{ste}$.
Donc les seules solutions de $y' = y$ sont bien $y = Ke^x$ et la seule qui prenne la valeur 1 en 0 est bien $y = e^x$.

II. Soit (E_n) $y' + y = \frac{x^n}{n!}e^{-x}$ (Eqn du 1er ordre, lin, à coeff. constant, avec second mb).

① $g(x) = h(x)e^{-x}$. a) g sol de $(E_n) \iff g'(x) + g(x) = \frac{x^n}{n!}e^{-x}$

$\iff h'(x)e^{-x} - h(x)e^{-x} + h(x)e^{-x} = \frac{x^n}{n!}e^{-x}$

$\iff h'(x) = \frac{x^n}{n!}$

$g'(x) = h'(x)e^{-x} - h(x)e^{-x}$

b) $\iff h(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + C$ et $h(0) = 0 \iff C = 0$

D'où $h(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ et donc $\boxed{g(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{-x}}$

② φ sol de $(E_n) \iff \varphi' + \varphi = \frac{x^n}{n!}e^{-x}$

$\iff \varphi' + \varphi = g' + g$ (car g sol de (E_n) par hypothèse).

$\iff (\varphi - g)' + (\varphi - g) = 0 \iff (\varphi - g)$ sol de (F) $y' + y = 0$.

b) (F) a pour solution générale $y = Ke^{-x}$ avec $K \in \mathbb{R}$ (TYPE $y' + ay = 0$)

c) Donc $\varphi - g = Ke^{-x} \iff \varphi(x) = g(x) + Ke^{-x} = \boxed{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{-x} + Ke^{-x}}$ sol gén de (E_n).

d) la solution particulière f de (E_n) telle que $f(0) = 0$ est donc telle que

$\frac{0^{n+1}}{(n+1)!}e^0 + Ke^0 = 0 \Rightarrow K = 0 \Rightarrow \boxed{f(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{-x}}$

conclusion : on voit que la solution générale de l'équation avec second membre est la SOMME d'une solution particulière de l'éq. avec second membre et de la solution générale de l'équation sans second membre.

Exercice III. Etude d'une fonction définie par une intégrale qu'on ne sait pas explicite.

1°) $\boxed{\begin{cases} f(0)=1 \\ f(x)=\dfrac{x}{e^x-1} \end{cases}}$ pour $x \neq 0$.

Par définition : f CONTINUE en 0 $\iff \lim\limits_{0} f = f(0)$.

or on sait que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x} = \text{Exp}'(0) = e^0 = 1$

Donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \dfrac{1}{1} = 1 = f(0)$ CQFD. De plus f continue sur $\mathbb{R}^*$ (quotient de continues).

2°) $\boxed{H(x) = \int_x^{2x} f(t)\,dt}$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$, car qq soit $x \in \mathbb{R}$, la fonction

a) f est continue sur $[x;2x]$ qq soit $x \geq 0$ car f continue sur $\mathbb{R}$.

De même f continue sur $[2x;x]$ qq soit $x < 0$.

b) F primitive de f sur $\mathbb{R}$ $\iff F'(x) = f(x)$ sur $\mathbb{R}$ et $H(x) = [F(t)]_x^{2x}$

d'où $H(x) = F(2x) - F(x)$ pour tout x. D'où H dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$H'(x) = (F(2x))' - F'(x) = 2F'(2x) - F'(x) = 2f(2x) - f(x)$ qq soit $x \in \mathbb{R}$.

donc $H'(x) = 2\dfrac{2x}{e^{2x}-1} - \dfrac{x}{e^x-1} = \dfrac{4x - x(e^x+1)}{e^{2x}-1} = \dfrac{x(3-e^x)}{e^{2x}-1}$ CQFD.

c) Sgn $[H'(x)]$ dépend des 3 facteurs x ; $3-e^x$; $e^{2x}-1$.

$3-e^x \geq 0 \iff e^x \leq 3 \iff x \leq \ln 3$; $e^{2x}-1 \geq 0 \iff e^{2x} \geq 1 \iff 2x \geq 0 \iff x \geq 0$

x	$-\infty$		0		$\ln 3$		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$3-e^x$		$+$		$+$	0	$-$	
$e^{2x}-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$H'(x)$		$+$	1	$+$		$-$	
H	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	A	$\searrow$	0

• Pour la démo des limites de H voir 3°) b) et 3°) c).

Rappel : Inégalité de la moyenne :

Si $m \leq f(t) \leq M$ sur $[a;b]$

Alors $m(b-a) \leq \int_a^b f(t)\,dt \leq M(b-a)$ et f CONTINUE sur $[a;b]$

ou $m \leq \dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt \leq M$.

[$\mu = \dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt$ s'appelle valeur moyenne de la fonction f sur $[a;b]$]

Ici pour encadrer $\dfrac{H(x)}{x}$ i.e. $\dfrac{1}{2x-x}\int_x^{2x} f(t)\,dt$ par $f(x)$ et $f(2x)$ il faut montrer que sur $[x;2x]$ on a f MONOTONE ($x \neq 0$).

or pour $x \neq 0$ $f'(x) = \dfrac{e^x-1-xe^x}{(e^x-1)^2}$ et le signe de $f'(x)$ ne dépend que du numérateur $u(x) = e^x - 1 - xe^x$. Pour obtenir le signe de $u(x)$ on étudie les variations sur $\mathbb{R}$: $\begin{cases} u'(x) = e^x - (e^x + xe^x) = -xe^x \\ u(0) = 0 \end{cases}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$u'(x)$		$+$	0	$-$	
u		$\nearrow$	0	$\searrow$	

D'où $u(x) \leq 0$ sur $\mathbb{R}$ $\Rightarrow f \searrow$ sur $\mathbb{R}^*$.

Par suite : Si $\boxed{x > 0}$ | $x \leq t \leq 2x \Rightarrow f(x) \geq f(t) \geq f(2x)$

d'où $f(x)(2x-x) \geq \int_x^{2x} f(t)\,dt \geq f(2x).(2x-x)$

Donc $f(x) \geq \dfrac{H(x)}{x} \geq f(2x)$ | De même pour $x < 0$ $f(x) \leq \dfrac{H(x)}{x} \leq f(2x)$ CQFD.

Ex. III (Suite) 3°) b) pour $x \to +\infty$ on a donc

$$x \cdot f(2x) \leq H(x) \leq x \cdot f(x).$$

or $\lim\limits_{x \to +\infty} x f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{e^x - 1} = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{x^2}{e^x} \times \dfrac{1}{1 - e^{-x}} = 0$ car $\begin{cases} \lim\limits_{+\infty} \dfrac{e^x}{x^2} = 0 \ (*) \\ \text{et} \\ \lim\limits_{+\infty} e^{-x} = 0. \end{cases}$

(*) en vertu des théorèmes de croissance comparée de l'Exp. et de la fonction puissance.

De même : $\lim\limits_{x \to +\infty} x f(2x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{2} 2x \cdot f(2x) = \frac{1}{2} \lim\limits_{X = 2x \to +\infty} X f(X) = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0.$

Donc d'après le "théorème des gendarmes" appliqué à l'inégalité double on en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} H(x) = 0$.

• NB : on en déduit également que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{H(x)}{x} = 1$ car $f(2x) \leq \dfrac{H(x)}{x} \leq f(x)$ et $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$

Par suite $H'(0) = 1$ car $H(0) = 0$.

3° c) pour $x \to -\infty$ on a $f(x) \leq \dfrac{H(x)}{x} \leq f(2x)$ or $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ car $\lim\limits_{-\infty} e^x = 0$ et donc $\lim\limits_{-\infty} e^x - 1 = -1$. Par suite $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{H(x)}{x} = +\infty$ puisque $\dfrac{H(x)}{x}$ est MINORÉ par une fonction qui tend vers $+\infty$.

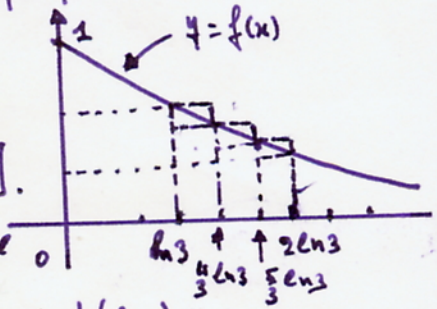
Enfin $x f(x) \leq H(x) \leq x f(2x)$ donc pour $x \to -\infty$ $\lim\limits_{-\infty} H(x) = -\infty$.

puisque dans ce cas $H(x)$ est MAJORÉ par une fonction qui tend vers $-\infty$.

(en effet $f(x) \to +\infty$ et $x \to -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to -\infty} x f(2x) = -\infty$.).

d) conclusion : la courbe (Γ) de H admet en $+\infty$ une ASYMPTOTE "HORIZ." d'équation $y = 0$, et admet en $-\infty$ une DIRECTION ASYMPTOTIQUE de l'axe $\vec{Oy}$ (sans asymptote).

4°) $H(\ln 3) = \displaystyle\int_{\ln 3}^{2\ln 3} f(t)\,dt$ représente la mesure de l'aire du domaine compris entre la courbe de f et l'int. $[\ln 3 ; 2\ln 3]$.



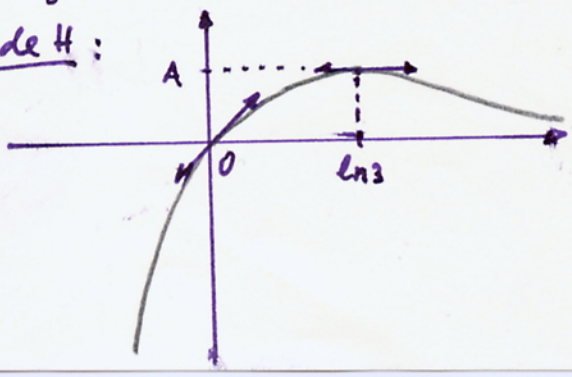
f étant décroissante sur $\mathbb{R}$ et la base de chaque rectangle élémentaire étant ici de $\frac{1}{3}\ln 3$ on a :

$$\underbrace{\frac{\ln 3}{3}\left[f(2\ln 3) + f\left(\tfrac{5}{3}\ln 3\right) + f\left(\tfrac{4}{3}\ln 3\right)\right]}_{\text{Aire des rectangles "inférieurs"}. \ \simeq 0{,}393} \leq H(\ln 3)$$

et $H(\ln 3) \leq \dfrac{\ln 3}{3}\left[f(\ln 3) + f\left(\tfrac{4}{3}\ln 3\right) + f\left(\tfrac{5}{3}\ln 3\right)\right] \simeq 0{,}490.$

• $\ln 3 \simeq 1{,}1$ $\Rightarrow H(\ln 3) \simeq 0{,}4 = \text{max} = A.$

5°) COURBE (Γ) de H :



NB : Pour démontrer que la fonction f initiale est dérivable en 0 on doit utiliser le développement de $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + x^3 \cdot \varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$. On trouve alors que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = -\dfrac{1}{2}$.

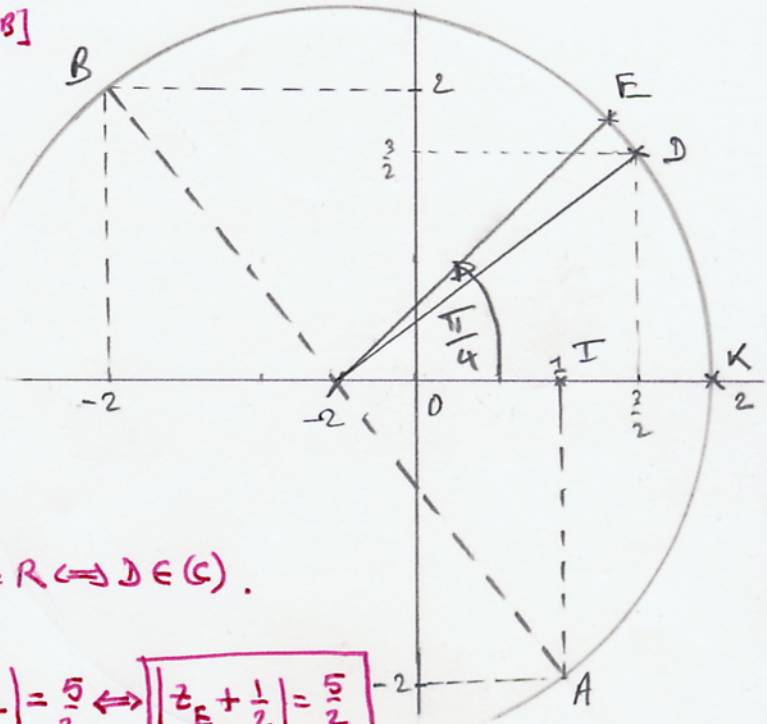
Ex. IV - NOMBRES COMPLEXES

$I \longleftrightarrow z_I = 1$

$A \longleftrightarrow z_A = 1-2i$ (C) de Diamètre [AB]

$B \longleftrightarrow z_B = -2+2i$

$\Omega \longleftrightarrow z_\Omega$ centre de (C) = milieu de [AB]



1°) $z_\Omega = \frac{1}{2}(z_A+z_B) = -\frac{1}{2}$ ($\Omega \in (\vec{ox})$).

$R = |z_A - z_\Omega| = \left|\frac{3}{2}-2i\right| = \sqrt{\frac{9}{4}+4} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \boxed{\frac{5}{2}}$

2°) $z_D = \frac{3+9i}{4+2i} = \frac{(3+9i)(4-2i)}{16+4}$

$= \frac{1}{20}(30+30i) = \frac{3}{2}(1+i) = \boxed{\frac{3}{2}+\frac{3}{2}i}$

$\left|z_D - z_\Omega\right| = \left|\frac{4}{2}+\frac{3}{2}i\right| = \sqrt{\frac{16+9}{4}} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \Omega D = R \Leftrightarrow D \in (C)$.

3°) $E \in (C) \Leftrightarrow \Omega E = R \Leftrightarrow |z_E - z_\Omega| = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \boxed{\left|z_E + \frac{1}{2}\right| = \frac{5}{2}}$

$(\vec{\Omega I}; \vec{\Omega E}) = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \text{Arg}\left[\frac{z_E - z_\Omega}{z_I - z_\Omega}\right] = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \text{Arg}(z_E - z_\Omega) - \text{Arg}(z_I - z_\Omega) = \frac{\pi}{4}$.

or $z_I - z_\Omega = \frac{3}{2} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \text{Arg}(z_I - z_\Omega) = 0$ d'où $\text{Arg}(z_E - z_\Omega) = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \boxed{\text{Arg}\left(z_E + \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{4}}$

b) Par suite $z_E + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{5}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \frac{5}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{5\sqrt{2}+5i\sqrt{2}}{4}$

Donc $z_E = \frac{5\sqrt{2}+5i\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{2} = \frac{5\sqrt{2}-2}{4} + i\frac{5\sqrt{2}}{2}$ CQFD.

4°) a) $r : \begin{cases} P \longrightarrow P \\ M \longmapsto M' \\ (z) \qquad (z') \end{cases}$ $\left| z' + \frac{1}{2} = e^{i\frac{\pi}{4}}\left(z + \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \boxed{z' - z_\Omega = e^{i\frac{\pi}{4}}(z - z_\Omega)} \right.$.

$\Leftrightarrow r = \text{Rotation}\left[\Omega; \frac{\pi}{4}\right]$ (cours).

b) $z_K = 2$. Alors $z'_K + \frac{1}{2} = e^{i\frac{\pi}{4}}\left(z_K + \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow z'_K = \frac{5}{2}e^{i\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{2} = \frac{5\sqrt{2}-2}{4} + i\frac{5\sqrt{2}}{2} = z_E$

donc $r(K) = E$.

On pouvait s'attendre à ce résultat car géométriquement on a :

par hypothèse : $(\vec{\Omega I}; \vec{\Omega E}) = \frac{\pi}{4}$ et $\vec{\Omega K}$ colinéaire à $\vec{\Omega I}$ et de même sens donc $(\vec{\Omega K}; \vec{\Omega E}) = \frac{\pi}{4}$ et de plus $\Omega K = \frac{5}{2} = \Omega E$

Donc E est bien l'image de K dans la Rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{4}$.