Exercice [1] (5 points). À traiter par **tous** les candidats.

Un quincaillier achète des ampoules à trois fournisseurs dans les proportions suivantes : 20 % au premier fournisseur, 50 % au deuxième fournisseur et 30 % au troisième fournisseur.
Le premier fournisseur fabrique 97 % d'ampoules sans défaut, le deuxième fournisseur fabrique 98 % d'ampoules sans défaut, le troisième fournisseur fabrique 95 % d'ampoules sans défaut.

▶ **1.** On choisit une ampoule au hasard dans le stock. On note D l'événement « L'ampoule est défectueuse », F_1 l'événement « L'ampoule provient du premier fournisseur », F_2 l'événement « L'ampoule provient du deuxième fournisseur » et F_3 l'événement « L'ampoule provient du troisième fournisseur ».
a) Calculer la probabilité de l'événement D, notée $P(D)$. *(0,75 point)*
b) Sachant que l'ampoule choisie est défectueuse, quelle est la probabilité $P_D(F_1)$ qu'elle provienne du premier fournisseur ?
Donner la valeur exacte et une valeur approchée à 10^{-3} près de $P_D(F_1)$. *(0,75 point)*

▶ **2.** On suppose que la probabilité qu'une ampoule soit sans défaut est de 0,969.
On monte 12 ampoules sur un lustre. Calculer la probabilité R qu'une ampoule au plus soit défectueuse. *(1 point)*
On donnera une valeur approchée à 10^{-3} près de R.

▶ **3.** La durée de vie en heures d'une ampoule, notée T, suit une loi de durée de vie sans vieillissement (ou loi exponentielle) de paramètre :

$$\lambda = \frac{1}{50\ 000} = 2 \cdot 10^{-5}.$$

Selon cette loi, pour tout x de $[0\ ;+\infty[$, $P(T \leqslant x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t}\, dt$.

a) Quelle est la probabilité P_1 qu'une ampoule dure plus de 25 000 heures ? Donner la valeur exacte de P_1. *(1 point)*

b) Quelle est la probabilité P_2 qu'une ampoule dure plus de 50 000 heures ? Donner la valeur exacte de P_2. *(1 point)*
c) Quelle est la probabilité P_3 qu'une ampoule dure plus de 50 000 heures, sachant qu'elle a déjà duré 25 000 heures ? Donner la valeur exacte de P_3. *(0,5 point)*

Exercice [2] (5 points). À traiter par **tous** les candidats.

I. ***Démonstration de cours.***

Soit E l'ensemble des fonctions solutions de l'équation différentielle $y' = y$.

Prérequis : la fonction $x \mapsto e^x$ est solution de E.
Démontrer l'unicité de la fonction u élément de E qui vérifie $u(0) = 1$.

II.

On donne un entier naturel n strictement positif, et on considère l'équation différentielle :

$$(\mathrm{E}_n) \quad y' + y = \frac{x^n}{n!}\,\mathrm{e}^{-x}.$$

1. On fait l'hypothèse que deux fonctions g et h, définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, vérifient, pour tout x réel :

$$g(x) = h(x)\mathrm{e}^{-x},$$

a. Montrer que g est solution de (E_n) si et seulement si, pour tout x réel

$$h'(x) = \frac{x^n}{n!}.$$

b. En déduire la fonction h associée à une solution g de (E_n), sachant que $h(0) = 0$. Quelle est alors la fonction g ?

2. Soit φ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

a. Montrer que φ est solution de (E_n) si et seulement si $\varphi - g$ est solution de l'équation :

$$(\mathrm{F}) \; y' + y = 0.$$

b. Résoudre (F).

c. Déterminer la solution générale φ de l'équation (E_n).

d. Déterminer la solution f de l'équation (E_n) vérifiant $f(0) = 0$.

Exercice [3] (5 points). À traiter par **tous** les candidats.

Le but de l'exercice est l'étude d'une fonction définie par une intégrale qu'on ne sait pas calculer explicitement.

1° Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} f(0)=1 \\ \text{et pour } x\neq 0,\ f(x)=\dfrac{x}{e^x-1}. \end{cases}$$

Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

2° *a*) Justifier, pour tout réel x, l'existence de

$$\mathrm{H}(x)=\int_x^{2x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

On a donc défini une fonction H de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Il ne s'agit en aucun cas de « calculer » $\mathrm{H}(x)$. On appelle Γ la courbe représentative de la fonction H dans un repère orthonormé.

b) Soit F une primitive de f sur $\mathbb{R}$. Exprimer H au moyen de F. En déduire que H est dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout x non nul, on a

$$\mathrm{H}'(x)=\frac{x}{e^{2x}-1}(3-e^x).$$

c) Étudier le sens de variation de la fonction H.

3° *a*) Montrer, en utilisant l'inégalité de la moyenne, que si x est non nul $\dfrac{\mathrm{H}(x)}{x}$ est compris entre $f(x)$ et $f(2x)$ (distinguer les cas $x>0$ et $x<0$).

b) Étudier la limite de $\mathrm{H}(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

c) Étudier la limite de $\dfrac{\mathrm{H}(x)}{x}$ lorsque x tend vers $-\infty$; en déduire la limite de $\mathrm{H}(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$.

d) Interpréter les résultats précédents pour la courbe Γ.

4° Quelle aire représente H (ln 3) ?
Déterminer un encadrement de H (ln 3) par la méthode des rectangles en utilisant la subdivision $\left(\ln 3, \frac{4}{3}\ln 3, \frac{5}{3}\ln 3, 2\ln 3\right)$.
On utilisera des valeurs approchées à 10^{-3} près des images par f des termes de la subdivision donnée.

5° Donner, en tenant compte des résultats précédents le tableau de variations de H, puis indiquer l'allure de Γ.

Exercice [4] (5 points). À traiter par les candidats n'ayant **pas** choisi la spécialité mathématique.

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

On désigne par I le point d'affixe $z_I = 1$, par A le point d'affixe $z_A = 1-2i$, par B le point d'affixe $z_B = -2+2i$ et par (C) le cercle de diamètre $[AB]$.

On fera une figure que l'on complètera avec les différents éléments intervenant dans l'exercice. On prendra pour unité graphique 2cm.

1. Déterminer le centre Ω du cercle (C) et calculer son rayon.

2. Soit D le point d'affixe $z_D = \dfrac{3+9i}{4+2i}$.

Écrire z_D sous forme algébrique puis démontrer que D est un point du cercle (C).

3. Sur le cercle (C), on considère le point E, d'affixe z_E, tel qu'une mesure en radians de $(\overrightarrow{\Omega I},\overrightarrow{\Omega E})$ est $\dfrac{\pi}{4}$.

***a.* Préciser le module et un argument de $z_E + \dfrac{1}{2}$.**

***b.* En déduire que $z_E = \dfrac{5\sqrt{2}-2}{4} + \dfrac{5\sqrt{2}}{4}i$.**

4. Soit r l'application du plan P dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' + \frac{1}{2} = e^{i\frac{\pi}{4}}\left(z + \frac{1}{2}\right).$$

***a.* Déterminer la nature de r et ses éléments caractéristiques.**

***b.* Soit K le point d'affixe $z_K = 2$.**

Déterminer par le calcul l'image de K par r. Comment peut-on retrouver géométriquement ce résultat ?

Exercice [5] [5] points.
À traiter par les candidats ayant **choisi** la spécialité mathématique.

Le plan P est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\,\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$. (unité graphique : 4 cm).

1. On considère les points A, B, C, D et E d'affixes respectives :

$$Z_A = e^{i\frac{\pi}{6}},\quad Z_B = e^{i\frac{2\pi}{3}},\quad Z_C = -1,\quad Z_D = -i \quad \text{et} \quad Z_E = e^{-i\frac{\pi}{6}}.$$

a. Faire la figure. *0,5 pt*

b. Montrer que $EA = ED$ et $EB = EC$. Montrer que (OE) est la médiatrice du segment [AD] et du segment [BC]. *1 pt*

c. Déterminer les points K et L images respectives de A et de B par la translation t de vecteur $\overrightarrow{OI}$. Placer les points K et L sur la figure. *1 pt*

2. On considère l'application F qui à tout point M d'affixe Z associe le point M′ d'affixe $Z' = \left(\frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\overline{Z}$ ($\overline{Z}$ désigne le conjugué de Z).

a. Justifier l'égalité $F = R \circ S$ où S est la réflexion (ou symétrie axiale) d'axe (OI) et R une rotation dont on précisera le centre et l'angle. *0,75 pt*

b. Montrer que F est une réflexion dont on précisera l'axe. *0,75 pt*

3. Soit G l'application qui à tout point M d'affixe Z associe le point M″ d'affixe Z″ définie par la formule : $Z'' = \left(\frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\overline{Z} + 1$.

Déterminer une application T telle que $G = T \circ F$. En déduire que G est un anti-déplacement. *1 pt*