

Démonstrations au programme du Bac. 2005

R.O.C. 1 (Limite d'une fonction en $+\infty$)

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \Leftrightarrow$ tout intervalle ouvert contenant L contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez grand
 $\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists M_\epsilon / x \geq M_\epsilon \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$ (ou $L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon$)

Exemple 1 Montrons que $f(x) = \frac{x-1}{x} \rightarrow 1$ si $x \rightarrow +\infty$.

$f(x) = 1 - \frac{1}{x}$ donc $|f(x) - 1| = \left| -\frac{1}{x} \right| = \frac{1}{|x|}$. Prenons $M_\epsilon = \frac{1}{\epsilon}$, si $x > M_\epsilon$, alors $|f(x) - 1| < \epsilon$.

R.O.C. 2 (Théorème des Gendarmes) Voici l'énoncé:

$\ll$ **Si** $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ **et** $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = L$ **alors** $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ $\gg$
Démonstration: fixons $\epsilon > 0$. Pour x assez grand ($x > M_\epsilon$) on a $L - \epsilon < g(x) < L + \epsilon$. De même $L - \epsilon < h(x) < L + \epsilon$.

Donc on a $L - \epsilon < g(x) \leq f(x) \leq h(x) < L + \epsilon$. *C.Q.F.D.*

Exemple 2 Montrons que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{\sin x}{x} = 0$.

$-1 \leq \sin x \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Puisque $x > 0$ on a $-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$. Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{x} = 0$ on en déduit $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

R.O.C. 3 (T.V.I.)

Voici l'énoncé:

$\ll$ **Soit** f **une fonction continue sur** $[a; b]$ **et soit** y_0 **un réel compris entre** $f(a)$ **et** $f(b)$. **Alors il existe un réel** $x_0 \in [a; b]$ **tel que** $f(x_0) = y_0$. $\gg$

On va le démontrer à l'aide des suites adjacentes.

On construit deux suites a_n et b_n en posant $a_0 = a$ et $b_0 = b$. Puis pour $n \geq 0$

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n & \text{si } y_0 \text{ est entre } f(a_n) \text{ et } f(\frac{a_n + b_n}{2}) \\ b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} & \text{si } y_0 \text{ est entre } f(\frac{a_n + b_n}{2}) \text{ et } f(b_n) \\ b_{n+1} = b_n \end{cases}$$

On vérifie immédiatement les propriétés suivantes:

1. y_0 est entre $f(a_n)$ et $f(b_n)$ pour tout entier n .

2. $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$ pour tout entier n .

3. $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{2}$ pour tout entier n .

On déduit 3) que $b_n - a_n$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et donc $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. En utilisant ce résultat et le 2), on en déduit que a_n et b_n sont adjacentes. Elles convergent donc vers un même réel que l'on note x_0 .

Puisque f est continue, $f(a_n) \rightarrow f(x_0)$ lorsque n tend vers $+\infty$ et de même $f(b_n) \rightarrow f(x_0)$. Notons $v_n = \min(f(a_n); f(b_n))$ et $w_n = \max(f(a_n); f(b_n))$. Alors on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = f(x_0)$ et on a aussi $v_n \leq y_0 \leq w_n$ à cause de 1). En passant à la limite lorsque n tend vers $+\infty$ dans l'encadrement précédent, on trouve $f(x_0) \leq y_0 \leq f(x_0)$ et donc on a $y_0 = f(x_0)$. C.Q.F.D.

Exemple 3 Soient f et g deux fonctions continues sur $[0; 1]$ telles que $f(0) = 0, f(1) = 1, g(0) = 1$ et $g(1) = 0$, montrons qu'il existe x_0 dans $[0; 1]$ tel que $f(x_0) = g(x_0)$. On pose $h(x) = f(x) - g(x)$ qui est continue sur $[0; 1]$. On a $h(0) = -1$ et $h(1) = 1$. Puisque 0 est compris entre $h(0)$ et $h(1)$ on peut appliquer le T.V.I. sur $[0; 1]$ et donc il existe x_0 tel que $h(x_0) = 0$, c.a.d. $f(x_0) = g(x_0)$.

R.O.C. 4 (Unicité de l'exponentielle) On suppose l'existence de la fonction Exp vérifiant $\text{Exp}'(x) = \text{Exp}(x)$ et $\text{Exp}(0) = 1$. On peut avoir à démontrer plusieurs choses selon les prérequis:

1. << **On a $\text{Exp}(x) \times \text{Exp}(-x) = 1$. La fonction Exp ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$** >> (elle ne change donc pas de signe à cause du T.V.I.)

Démonstration: on pose $g(x) = \text{Exp}(x)\text{Exp}(-x)$. On a $g'(x) = \text{Exp}(x)\text{Exp}(-x) + \text{Exp}(x)(-\text{Exp}(-x)) = 0$ pour tout réel x . Donc $g(x)$ est constante sur l'intervalle $\mathbb{R}$. Or $g(0) = 1$ et donc $\text{Exp}(x)\text{Exp}(-x) = 1$ pour tout réel x . On ne peut donc pas avoir $\text{Exp}(x) = 0$ sinon on aurait $0 = 1$.

2. << **La fonction Exp est l'unique fonction vérifiant $\text{Exp}'(x) = \text{Exp}(x)$ et $\text{Exp}(0) = 1$.** >>

Démonstration: Soit f une fonction vérifiant ces propriétés, alors on pose $g(x) = f(x)\text{Exp}(-x)$ qui est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $g'(x) = f'(x)\text{Exp}(-x) - f(x)\text{Exp}(-x) = f(x)\text{Exp}(-x) - f(x)\text{Exp}(-x) = 0$ pour tout réel x . Donc $g(x)$ est constante sur l'intervalle $\mathbb{R}$ et vaut $g(0) = 1$ (Ceci démontre au passage que Exp ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$). Donc $f(x) = \frac{1}{\text{Exp}(-x)}$. D'après la question précédente (admise ou à démontrer), on a $\frac{1}{\text{Exp}(-x)} = \text{Exp}(x)$ et donc $f(x) = \text{Exp}(x)$.

C.Q.F.D.

Exemple 4 La solution générale de l'équation différentielle $y' = \lambda y$ est $y = \alpha e^{\lambda x}$.

Soit f une solution. On vérifie que $e^{\lambda x}$ est solution. Soit $g(x) = f(x)e^{-\lambda x}$. On a $g'(x) = f'(x)e^{-\lambda x} + f(x)(-\lambda)e^{-\lambda x} = \lambda f(x)e^{-\lambda x} - \lambda f(x)e^{-\lambda x} = 0$.

Donc $g(x)$ est constante sur $\mathbb{R}$ et vaut $\alpha = g(0)$ soit encore $f(x) = \alpha \frac{1}{e^{-\lambda x}} = \alpha e^{\lambda x}$.

R.O.C. 5 (Existence de la fonction Exp) Il existe deux démonstrations, elles sont un peu délicates, la deuxième est intéressante mais assez technique et longue (amateurs de CPGE...). Vous n'avez pas à les apprendre par coeur en tout cas, juste en maîtriser les différents aspects techniques.

1. *Démonstration classique: on construit la fonction Logarithme: soit $f(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ car $\frac{1}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. On a $f'(x) = \frac{1}{x}$. Cette dérivée est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$ donc f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$. Donc f est une bijection croissante de $]0; +\infty[$ sur son image $]a; b[$ (c'est un intervalle par le T.V.I. et $a = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ et $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ puisque f est croissante). Soit $g :]a; b[\rightarrow \mathbb{R}_+^*$ sa réciproque. On a*

$$f(g(x)) = x \text{ donc } g'(x)f'(g(x)) = 1 \text{ d'où } g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = g(x)$$

Puisque $f(1) = 0$ on en déduit $g(0) = 1$. Il reste à montrer que $a = -\infty$ et $b = +\infty$, ce qui revient à montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$, voir ROC suivant.

2. *Démonstration par approximations adjacentes: on suppose connue l'inégalité de Bernoulli (que vous savez démontrer):*

$$n \in \mathbb{N}, x > -1 \implies (1+x)^n \geq 1+nx$$

On pose $u_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ et $v_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{-n} = \frac{1}{\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n}$, suites qui sont positives pour n assez grand ($n \geq |x|$).

Pour tout x fixé, la suite $u_n(x)$ est croissante (à partir d'un certain rang), la suite $v_n(x)$ est décroissante (à partir d'un certain rang):

$$\begin{aligned} u_{n+1}(x) &= \left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{x}{n} - \frac{x}{n(n+1)}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n+1} \left[1 - \frac{x}{n(n+1)\left(1 + \frac{x}{n}\right)}\right]^{n+1} \\ &\geq \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n+1} \left[1 - \frac{x}{n\left(1 + \frac{x}{n}\right)}\right] = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \left[1 + \frac{x}{n} - \frac{x}{n}\right] = u_n(x) \end{aligned}$$

L'inégalité de Bernoulli utilisée ci-dessus n'est valable que si $-\frac{x}{n(n+1)\left(1 + \frac{x}{n}\right)} \geq -1$, i.e. si

$\frac{x}{n(n+1)\left(1 + \frac{x}{n}\right)} \leq 1$, ce qui est vrai pour n assez grand puisque pour tout x fixé, $\lim_{n \rightarrow 0} n(n+1)\left(1 + \frac{x}{n}\right) = 0$. On remarque que $v_n(x) = \frac{1}{u_n(-x)}$, cette suite est donc décroissante à partir d'un certain rang.

On remarque que $\frac{u_n(x)}{v_n(x)} = \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n$, or $1 \geq \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n \geq 1 - \frac{x^2}{n}$, par Bernoulli pour $n \geq |x|$. D'où

$$\left(1 - \frac{x^2}{n}\right) v_n(x) \leq u_n(x) \leq v_n(x)$$

Donc on a $0 \leq v_n(x) - u_n(x) \leq \frac{x^2}{n} v_n(x) \leq \frac{x^2}{n} v_{n_0}(x)$ avec $n_0 \geq |x|$ par décroissance de $v_n(x)$. Donc $v_n(x) - u_n(x)$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

On en déduit que pour x fixé, les suites $u_n(x)$ et $v_n(x)$ sont adjacentes. Elles convergent donc vers une même limite notée $\text{Exp}(x)$. On remarque que $v_n(0) = u_n(0) = 1$ et donc que $\text{Exp}(0) = 1$. Il reste à montrer que $\text{Exp}(x)$ est dérivable et que $\text{Exp}'(x) = \text{Exp}(x)$.

Pour cela on va étudier la limite lorsque h tend vers 0 de $\frac{\text{Exp}(x+h) - \text{Exp}(x)}{h}$.

On a

$$\left(1 + \frac{x+h}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \left[1 + \frac{h}{n(1 + \frac{x}{n})}\right]^n$$

Or d'après Bernoulli, si $|h| < 1$ et si $n > 1-x$, i.e. $n+x > 1$, alors $\left[1 + \frac{h}{n(1 + \frac{x}{n})}\right]^n \geq 1 + \frac{h}{1 + \frac{x}{n}}$.

En passant à la limite lorsque n tend vers $+\infty$, on a donc

$$\text{Exp}(x+h) \geq \text{Exp}(x)(1+h)$$

On a aussi $\text{Exp}(x+h) \leq \frac{\text{Exp}(x)}{1-h}$ en remplaçant h par $-h$ et x par $x+h$ dans l'inégalité précédente.

On a donc $h\text{Exp}(x) \leq \text{Exp}(x+h) - \text{Exp}(x) \leq \frac{h\text{Exp}(x)}{1-h}$, on en déduit en divisant par h (distinguer les cas $h > 0$ et $h < 0$) et le théorème des Gendarmes que

$$\text{Exp}'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{Exp}(x+h) - \text{Exp}(x)}{h} = \text{Exp}(x)$$

R.O.C. 6 (Théorèmes de comparaison)

1. << **Pour tout entier relatif n on a** $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$. >>

Si $n \leq 0$ il suffit de montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$. Il suffit pour cela de montrer que $e^x \geq x$ si $x \geq 0$. On étudie la fonction $g(x) = e^x - x$. On a $g'(x) = e^x - 1 \geq 0$ si $x \geq 0$ car Exp est croissante (sa dérivée $\text{Exp}(x)$ est positive). Donc g est croissante et donc si $x \geq 0$ on a $g(x) \geq g(0) = 1$. On a montré que $e^x \geq x + 1$ si $x \geq 0$. Donc e^x tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ puisque $x + 1$ tend vers $+\infty$.

Si $n \geq 1$, on raisonne par récurrence pour montrer $\mathcal{P}_n : e^x \geq \frac{x^n}{n!}$. Pour $n = 0$ on l'a déjà montré. Supposons que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour un certain rang $n \geq 0$. Soit $g(x) = e^x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$. Alors on a $g'(x) = e^x - \frac{x^n}{n!}$. Par hypothèse de récurrence, on a donc $g'(x) \geq 0$ pour $x \geq 0$. Donc g est croissante sur $[0; +\infty[$ et donc $g(x) \geq g(0) = 1$ si $x \geq 0$. Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie. Par récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier n .

On en déduit $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} \geq \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{n+1}}{x^n(n+1)!} = +\infty$. C.Q.F.D.

2. << **Pour tout entier relatif n , on a** $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x^n} = 0$ >>

On déduit ce résultat du précédent: on pose $X = -x$, ainsi $\frac{e^x}{x^n} = \frac{e^{-X}}{(-X)^n} = (-1)^n \frac{1}{X^n e^X}$. On a donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x^n} = \lim_{X \rightarrow +\infty} (-1)^n \frac{1}{e^X X^n} = 0$ d'après le premier théorème de comparaison.

3. << **Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a** $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$ >>

Il suffit de poser $y = \ln x$, on a alors $\frac{\ln x}{x^n} = \frac{y}{(e^y)^n} = \frac{1}{n} \frac{ny}{e^{ny}}$. Donc en posant $Y = ny$ on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = \lim_{Y \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \frac{Y}{e^Y} = 0$. C.Q.F.D.

4. << **Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a $\lim_{x \rightarrow 0} x^n \ln x = 0$** >>

On pose encore $y = \ln x$ de sorte que $x^n \ln x = e^{ny} y = \frac{1}{n} e^Y Y$ avec $Y = ny$. On a alors

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^n \ln x = \lim_{Y \rightarrow -\infty} \frac{1}{n} e^Y Y = 0. \text{ C.Q.F.D.}$$

R.O.C. 7 (Théorème fondamental de l'analyse)

<< **Pour toute fonction f continue sur $[a; b]$ et $c \in [a; b]$, la fonction $F(x) = \int_c^x f(t) dt$ est l'unique primitive de f qui s'annule en c** >>

On démontrera ce théorème dans le cas où f est décroissante. (Le cas croissant se montre de la même façon tandis que le cas général nécessite l'utilisation de l'inégalité $\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt$: voir cours).

On doit déterminer la limite du taux d'accroissement de F entre x et $x+h$ lorsque h tend vers 0.

On écrit

$$\begin{aligned} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} &= \frac{1}{h} \left(\int_c^{x+h} f(t) dt - \int_c^x f(t) dt \right) \\ &= \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt \end{aligned}$$

Or, puisque f est décroissante, on a $f(x+h) \leq f(t) \leq f(x)$ pour $t \in [x; x+h]$ si $h > 0$ et au contraire $f(x) \leq f(t) \leq f(x+h)$ pour $t \in [x+h; x]$ si $h < 0$. On déduit de l'inégalité de la moyenne que $\frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt$ est comprise entre $f(x)$ et $f(x+h)$. Puisque f est continue en x , $\lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) = f(x)$. Donc par le théorème des Gendarmes, on en déduit que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt = f(x)$$

Donc $F'(x) = f(x)$. De plus il est clair que $F(c) = 0$. L'unicité résulte du fait que deux primitives d'une même fonction sur un même intervalle diffèrent d'une constante et donc que ces deux primitives sont égales si elles ont même valeur en un point (la constante est nulle). C.Q.F.D.