Révisions et Compléments / Suites Numériques

I – **Raisonnement par Récurrence** : (rappel de 1ère Classe …)

Étant donné une propriété notée (P_n) faisant intervenir l'entier Naturel n.
On peut souvent démontrer (P_n) en appliquant le *principe d'induction* ou « raisonnement par récurrence. Pour cela on procède en 3 étapes :

1ère Étape : **INITialisation** : on démontre « à la main » que **(P_0) est vraie**, ou que (P_1) est vraie.

2e Étape : **HEREDITE** : on démontre à l'aide des propriétés connues par l'énoncé ou en vertu des règles de calcul habituelles que la propriété (P_n) est héréditaire, c'est à dire que l'*implication* : $\boxed{(P_n) \Rightarrow (P_{n+1})}$ est vraie pour n fixé, quelconque.

N.B. : cela ne suppose pas que (P_n) est vrai pour tout n, mais seulement que si (P_n) est vrai pour une certain rang n, alors cela entraîne que (P_{n+1}) l'est aussi.

3e Étape : on en conclut que (P_n) est vraie pour tout n en vertu du principe d'induction (procédé inverse de la déduction).

II – **Techniques de démonstration pour les suites Récurrentes :**

Soit (U_n) une suite définie par récurrence à l'aide d'une fonction numérique f connue.

$\boxed{U_{n+1} = f(U_n) \text{ et } U_0 = a}$ (constante donnée).

1°) Pour montrer que **(U_n) est majorée**, ou minorée, ou bornée, il suffit souvent d'utiliser les propriétés de la fonction f pour établir la propriété par récurrence.

Par exemple : si la fonction f admet un *point fixe* a (i.e. tel que f(a) = a.) et si f est croissante sur un intervalle I, contenant (U_n) et a,
on peut prouver que $U_n < a$ quelque soit n, très simplement par récurrence quasi immédiate en observant que l'hérédité résulte immédiatement du fait que, *par définition de la croissance d'une fonction*, l'inégalité est conservée en appliquant f aux deux membres :

$$[U_n < a] \Rightarrow [f(U_n) < f(a)] \Rightarrow [U_{n+1} < a]$$

On peut souvent aussi démontrer ces implications directement sans utiliser le sens de variation de f mais c'est généralement plus long que d'établir le sens de variation de f à l'aide du signe de sa dérivée.

2°) Pour montrer que **(U_n) est monotone** il suffit souvent de montrer que f est croissante sur l'intervalle contenant (U_n). Dans ce cas encore ou a évidemment :

$$(P_n) : [U_n < U_{n+1}] \Rightarrow [f(U_n) < f(U_{n+1})] \Rightarrow [U_{n+1} < U_{n+2}] : (P_{n+1}) \quad \text{(i)}$$

ou $$(P_n) : [U_n > U_{n+1}] \Rightarrow [f(U_n) > f(U_{n+1})] \Rightarrow [U_{n+1} > U_{n+2}] : (P_{n+1}) \quad \text{(ii)}$$

Les implications (i) montreraient que la suite (U_n) est croissante (si toutefois l'initialisation est vraie).
Les implications (ii) montreraient que la suite (U_n) est décroissante (si toutefois l'init. est vraie).

3°) **Piège à double détente** : Si la fonction f est décroissante (et non pas croissante) sur l'intervalle contenant la suite, alors les implications de type (i) et (ii) ci-dessus sont fausses…

Mais on peut en déduire que la **suite des termes de rang pair** et la **suite des termes de rang impair** sont des suites monotones.

En effet : si f est décroissante alors la fonction $g = f \circ f$ est croissante donc on obtient des résultats semblables aux précédentes en appliquant f deux fois de suite, et en remarquant que :

$$g(U_n) = (f \circ f)(U_n) = f[f(U_n)] = f(U_{n+1}) = U_{n+2},$$

on pose généralement : $V_n = U_{2n}$ et $W_n = U_{2n+1}$

Ainsi on peut montrer que par exemple $(P_n) : [V_n < V_{n+1}]$ serait héréditaire :

$$[U_{2n} < U_{2n+2}] \Rightarrow [f(U_{2n}) > f(U_{2n+2})] \Rightarrow [U_{2n+1} > U_{2n+3}]$$

$$\Rightarrow [f(U_{2n+1}) < f(U_{2n+3})] \Rightarrow [U_{2n+2} < U_{2n+4}] \text{ i.e. } [V_{n+1} < V_{n+2}]$$

Bien entendu ces inégalités pourraient être toutes inversées et on peut aussi remplacer V_n par W_n
C'est à dire que (V_n) est croissante si $V_0 < V_1$ et décroissante si $V_0 > V_1$. De même pour (W_n).

4°) **Théorème des suites monotones bornées** : on peut démontrer le théorème suivant que le programme de Term.S demande d'admettre :

Si une suite (U_n) est croissante et majorée alors elle est nécessairement convergente.
Si une suite (V_n) est décroissante et minorée alors elle est nécessairement convergente.

On remarquera cependant que la limite n'est par nécessairement égale au majorant (ou au minorant) trouvé, sauf si l'on a démontré que ce majorant était le plus petit possible (ou que ce minorant est le plus grand possible).

En général ce théorème ne permet pas à lui seul d'obtenir la valeur de la limite λ . On peut tout au plus affirmer que si (U_n) est croissante, et que pour tout n, $U_n < M$ alors il existe une limite $\lambda \leq M$, ou si (V_n) est décroissante, et que pour tout n, $V_n > m$ alors il existe une limite $\lambda \geq m$.

4°) **Suites adjacentes** *(prog. Term.S)*. Par définition on dit que 2 suites (U_n) et (V_n) sont adjacentes si, et seulement si,

a) (U_n) croissante et (V_n) décroissante.
b) quelque soit n (*à partir d'un certain rang*) on a $U_n \leq V_n$.
c) $\text{Lim } (V_n - U_n) = 0$.

Naturellement dans ce cas il est évident que les deux suites sont convergentes (d'après le théorème de convergence monotone) et qu'elles ont la même limite (en raison de la condition (c)).

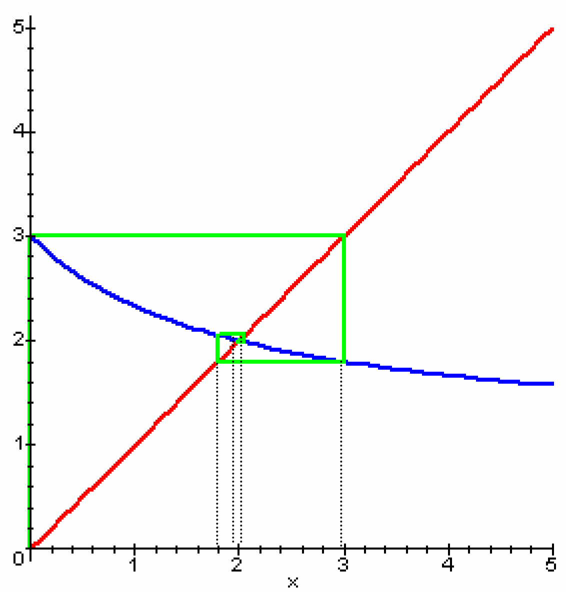
En effet , si $\text{Lim}(U_n) = \lambda$, $\text{Lim}(V_n) = \lambda'$ et $\lambda - \lambda' \neq 0$, alors la condition c) ne pourrait être réalisée :

$$U_0 , U_1 , U_2 , \dots U_n ,\dots \lambda \dots \lambda' \dots V_n , \dots V_2 , V_1 , \dots V_n$$

Et les suites ne seraient pas adjacentes.

<u>Exemple type</u> : $f(x) = \dfrac{x+6}{x+2} = \dfrac{4}{x+2} + 1$ est une fonction décroissante sur $[0 ;+\infty [$, de plus elle admet un point fixe sur cet intervalle car l'équation $f(x) = x$ admet pour solutions $x = -3$ ou $x = 2 > 0$ i.e. $f(2) = 2$ (car $-3 \notin [0 ;+\infty [$)

Donc en posant $U_{n+1} = f(U_n)$ i.e. $U_{n+1} = \dfrac{U_n + 6}{U_n + 2}$ et $U_0 = 0$ on se trouve exactement dans la situation du § 3°) ci-dessus.



On (*pronom indéfini malhonnête*) sait de plus, que la représentation graphique d'une telle suite donne un « colimaçon » dont le centre est le point d'intersection de la courbe de f et de la 1ère bissectrice, qui correspond au point fixe de f.

On observe sur la figure ci-contre que la suite (U_n) est représentée par les points de l'axe Ox correspondant aux abscisses des points d'intersection de la courbe et du colimaçon.

Cette suite n'est évidemment pas monotone, par contre elle est évidemment bornée (par 0 à gauche, et par 3 à droite). De plus la suite des termes de rang pair : $U_0 , U_2 , U_4 \dots$ est croissante, et la suite des termes de rang impair $U_1 , U_3 , U_5 \dots$ est décroissante.

(On démontre cela aisément à l'aide des remarques du § 3°) ci-dessus).

Naturellement on doit pouvoir démontrer que (U_n) converge vers 2 (pt fixe de f).

Pour cela il existe plusieurs méthodes qui sont indiquées dans les énoncés des problèmes de ce type.

<u>1ère méthode</u> : (style 1ère classe) on construit une suite auxiliaire (V_n) définie par $V_n = \dfrac{U_n - 2}{U_n + 3}$

(où l'on observera judicieusement que 2 et –3 sont les solutions de l'équation du point fixe de f …)

On démontre alors que la suite (V_n) est géométrique (ici de raison $q = \frac{-1}{4}$) donc que (V_n) converge vers 0 et par suite (sic !) que $U_n = \dfrac{2 + 3V_n}{1 - V_n}$ a pour limite 2.

<u>2e méthode</u> : (style Terminale) on démontre que la suite des termes de rang pair et la suite des termes de rang impair sont adjacentes, et donc convergent vers une même limite λ et que cette limite ne peut être que l'un des points fixes de f, puisque par passage à la limite dans $U_{n+1} = f(U_n)$ obtient évidemment $\lambda = f(\lambda)$ donc que λ est bien l'une des solutions de l'équation $f(x) = x$.

III - **Suites Arithmétiques – Suites Géométriques et Séries associées** *(Rappels de 1ère classe…)*

1°) (U_n) dite **arithmétique** ssi quelque soit n, la *différence* de 2 termes consécutifs est constante :
i.e. quelque soit n, $\boxed{U_{n+1} - U_n = r}$ (constante) et donc (par récurrence immédiate) en posant $U_0 = a$, (1er terme) raison r, $\boxed{U_n = a + n.r}$.

2°) (V_n) dite **Géométrique** ssi quelque soit n, le *rapport* de 2 termes consécutifs est constant :
i.e. quelque soit n, $\boxed{V_{n+1} / V_n = q}$ (constante) et donc en posant $V_0 = a$, $\boxed{V_n = a.q^n}$.

3°) **Série** associée à une suite : on appelle série de terme général U_n la suite définie par la *somme* des (n+1) premiers termes de la suite U_n : $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \ldots + U_n$

a) Si (U_n) est arithmétique on a $S_n = (n+1)\,a + r\,(1 + 2 + \ldots + n) = (n+1)a + r.n(n+1)/2$
D'où $S_n = (n+1)[\,U_0 + U_n]\,/2$

b) Si (U_n) est géométrique on a $S_n = U_0\,[1 + q + q^2 + \ldots + q^n] = U_0\dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

En particulier si $|q| < 1$ on sait que $U_n = a.q^n$ tend vers 0 et donc $\text{Lim}\,(S_n) = \dfrac{U_0}{1 - q}$

4°) **Séries de Dominos** (Complément de Term.S) dans certains cas particulier on peut déterminer la limite de Sn directement.

Ex.1: si $U_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$ alors on voit que l'on a directement par le jeu des dominos (n>0)

$$S_n = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} \text{ donc Lim } S_n = 1$$

Ex.2: (voir Ex .3 / Cont.2 /TS4 soit $U_n = \dfrac{1}{\sqrt{1}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$ alors on voit que l'on a encore par le jeu des dominos (n>0)

$$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

$$\text{D'où } \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq U_{n+1} - U_n \leq 0$$

Et enfin encore par le jeu des dominos (n>0) $-2 + \dfrac{1}{\sqrt{n}} \leq U_n$

D'où (U_n) décroissante et minorée par –2 donc convergente.