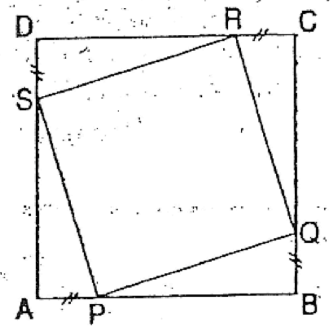
ABCD est un carré de côté 4 et P, Q, R, S sont les points des segments [AB], [BC], [CD], [DA] tels que :

$$AP = BQ = CR = DS.$$

On pose $AP = x$.



1. a. Montrez que les quatre côtés du quadrilatère PQRS ont même longueur.

b. Montrez que $\widehat{ASP} = \widehat{BPQ}$.

INDICATION : Deux angles aigus qui ont le même sinus sont égaux.

c. Montrez que PQRS est un carré.

d. Calculez l'aire $f(x)$ de ce carré.

2. Vérifiez que $f(x) = 2(x-2)^2 + 8$.

3. Étudiez les variations de f sur [2 ; 4], puis sur [0 ; 2] ; donnez le tableau de variation de cette fonction sur [0 ; 4].

4. Pour quelle valeur de x l'aire $f(x)$ est-elle minimale ? Quelle est alors cette aire ?

5. On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal (unités : 1 cm en abscisse pour $\frac{1}{2}$, et 1 cm en ordonnée pour 2).

a. Précisez les points de $\mathscr{C}$ d'abscisses :

$$0,\ \frac{1}{2},\ 1,\ \frac{3}{2},\ 2,\ \frac{5}{2},\ 3,\ \frac{7}{2},\ 4.$$

b. Tracez $\mathscr{C}$.

6. a. À l'aide du graphique précédent, expliquez pourquoi il existe deux positions du point P sur [AB] telles que l'aire du carré PQRS soit égale à 10.

b. Retrouvez ce résultat par le calcul et précisez les deux positions du point P.

7. a. Comparez les réels :

$$f(0) \text{ et } f(4),\ f\left(\frac{1}{2}\right) \text{ et } f\left(\frac{3}{2}\right),\ f(1) \text{ et } f(3).$$

b. Plus généralement, montrez que pour tout réel a de [0 ; 2] :

$$f(2-a) = f(2+a).$$

c. Le résultat précédent indique que la courbe $\mathscr{C}$ a une propriété géométrique remarquable. Laquelle ?