Mémo / Définition et Construction d'une Hyperbole Equilatère (1)

On considère la fonction définie par : $\boxed{f : x \mapsto y = \dfrac{A}{x}}$

I- **Propriétés algébriques** :

1°) Fonction ***impaire*** : pour tout x Réel, $\boxed{f(-x) = -f(x)}$.

2°) Taux d'accroissement ***non constant*** : $\boxed{T_{[f,(x_1,x_2)]} = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \dfrac{-A}{x_1 x_2}}$

3°) Signe de T = Signe de *(- A)* sur [0 ; +∞[et sur]- ∞ ; 0]

4°) Tableau de variation :

A > 0					***A < 0***				
x	-∞ -1	0	1 +∞		*x*	-∞ -1	0	1 +∞	
T	-		-		T	+		+	
f	$0^{(-)}$ ↘ -A ↘ - ∞		+ ∞ ↘ A ↘ $0^{(+)}$		*f*	$0^{(+)}$ ↗ -A ↗ +∞		- ∞ ↗ A ↗ $0^{(-)}$	

II- **Propriétés géométriques** :

1°) La courbe représentative de f admet le centre O du repère pour centre de symétrie. Cette courbe s'appelle une ***Hyperbole équilatère*** en raison de la Symétrie centrale et des variations inverses de x et de y *(cf. style « hyperbolique » en Français).*

2°) L'Hyperbole coupe la 1ère bissectrice ($y = x$) au point I de coordonnées $(\sqrt{A};\sqrt{A})$ *pour* $A > 0$ ou $(\sqrt{-A};-\sqrt{-A})$ *pour* $A < 0$

3°) Au point I l'Hyperbole est tangente à la perpendiculaire à la bissectrice.

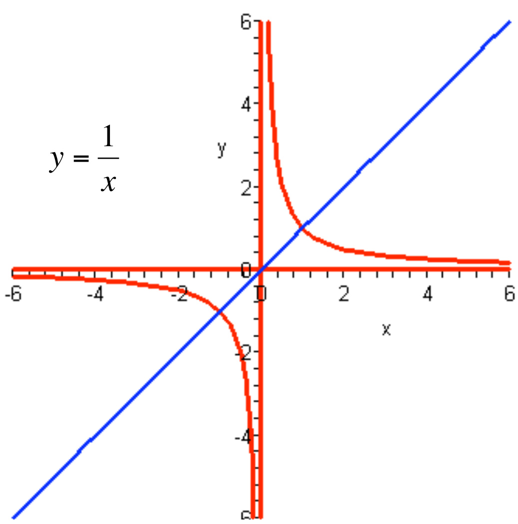
4°) L'Hyperbole passe par le point J(1 ;A) et son symétrique (-1 ;-A) par rapport à O

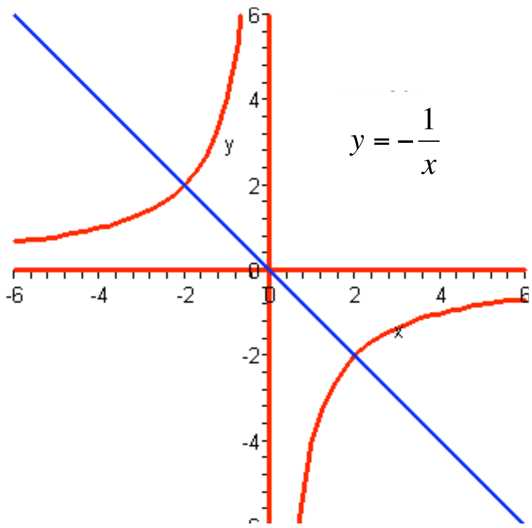
5°) Pour A > 0 les points sont symétriques par rapport à la 1ère Bissectrice (y = x)
Pour A < 0 les points sont symétriques par rapport à la 2^{e} Bissectrice (y = - x)

6°) Lorsque |A| est grand devant l'unité (|A| >> 1) , l'Hyperbole est très évasée, inversement si |A| <<1 l'hyperbole est très resserrée sur le centre O.

7°) L'Hyperbole ne contient aucun segment de droite.

8°) L'Hyperbole admet pour *asymptotes* les axes de coordonnées (Ox) et (Oy).





Mémo / Hyperboles & Fonctions Homographiques (2)

Les fonctions **homographiques** sont les fonctions du type : $\boxed{f : x \mapsto y = \dfrac{ax+b}{cx+d}}$ *avec* $\boldsymbol{c \neq 0}$

Cette expression peut prendre l'une des formes suivantes :

$$(H1) \qquad y = \frac{A}{x}$$

$$(H2) \qquad y = \frac{A}{x} + H$$

$$(H3) \qquad y = \frac{A}{x-L}$$

$$(H4) \qquad y = \frac{A}{x-L} + H$$

$$(H5) \qquad y = \frac{ax+b}{cx+d}$$

1°) On passe de (H1) à (H2) par une **Translation** de vecteur H. $\vec{j}$ (parallèle à l'axe Oy)

2°) On passe de (H1) à (H3) par une **Translation** de vecteur L. $\vec{i}$ (parallèle à l'axe Ox)

3°) On passe de (H1) à (H4) par une **Translation** de vecteur $\vec{V} = L\vec{i} + H\vec{j}$
l'Hyperbole (H4) a pour **centre** le point O'(L ;H) et pour **asymptotes** les droites $\boldsymbol{x = L}$ («verticale », parallèle à (Oy)), et $\boldsymbol{y = H}$ (« horizontale » , parallèle à (Ox)) en effet en posant $\boxed{X = x - L}$ *et* $\boxed{Y = y - H}$ on obtient $\boxed{Y = \dfrac{A}{X}}$ dans le repère (O'X ; O'Y).
On construit (H4) dans le repère (O'X,O'Y) comme on a construit (H1) dans le repère (*Ox*,*Oy*).

4°) Pour construire l'Hyperbole (H5) on peut au choix :

a. se ramener à la forme (H4) en opérant la décomposition de la fraction (cf. exemples).

b. déterminer les coordonnées du « sommet » $\boxed{O'(\,L = \dfrac{-d}{c}\,; H = \dfrac{a}{c})}$ puis les intersections avec les axes : (Oy) : $(0\,;\frac{b}{d})$ et (Ox) $(\frac{-b}{a}\,; 0)$.