

Mémo / Définition et Construction d'une Parabole (1)

On considère la fonction définie par : $f : x \mapsto y = ax^2$

I- Propriétés algébriques :

1°) Fonction **paire** : pour tout x Réel, $f(-x) = f(x)$.

2°) Taux d'accroissement **non constant** : $T_{[f,(x_1,x_2)]} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = a(x_1 + x_2)$

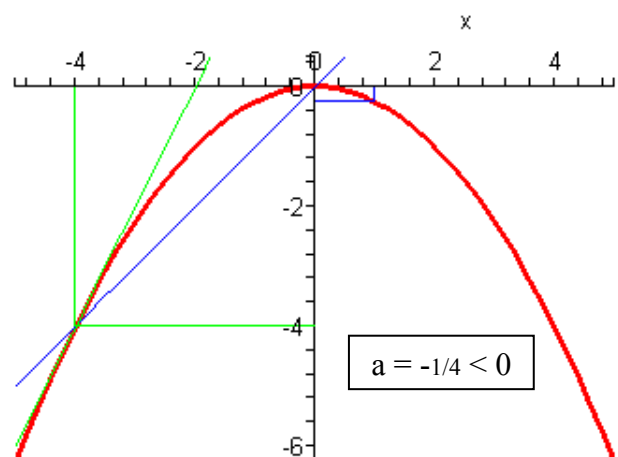
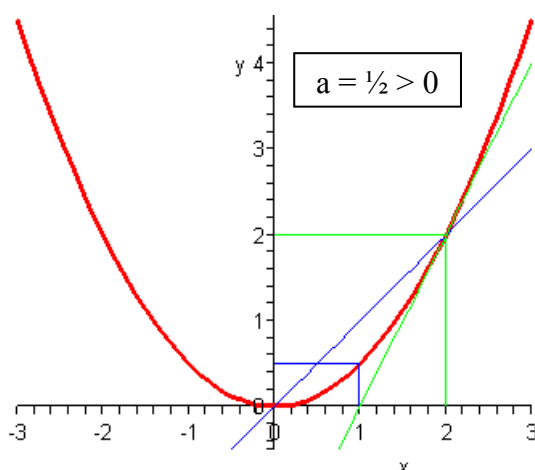
3°) Signe de T = Signe de a sur $[0 ; +\infty[$ et Signe de T = Signe de (-a) sur $] - \infty ; 0]$

4°) Tableau de variation :

$a > 0$						$a < 0$					
x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
T	-			+		T	+			-	
f	$+\infty$		↘ a ↘		0	↘ a ↘		0		$+\infty$	
f	$-\infty$		↘ a ↘		0	↘ a ↘		0		$-\infty$	

II- Propriétés géométriques :

- 1°) La courbe représentative de f admet l'axe des ordonnées (Oy) pour axe de symétrie. Pour cette raison cette courbe s'appelle une **Parabole**.
- 2°) La Parabole est tangente en O à l'axe (Ox)
- 3°) La Parabole passe par le point A(1 ; a).
- 4°) Si $a > 0$ la parabole a sa concavité dirigée vers les $y > 0$: « le bol tient l'eau »
Si $a < 0$ la parabole a sa concavité dirigée vers les $y < 0$: « le bol ne tient pas l'eau »
- 5°) La Parabole coupe la 1^{ère} bissectrice ($y = x$) au point B(1/a ; 1/a)
- 6°) Au point B la parabole est tangente à la droite qui joint ce point au milieu du segment situé de la sous-tangente, c'est-à-dire au point d'abscisse 1/2a
- 7°) Par symétrie par rapport à Oy on obtient les points A'(-1 ; a) et B'(-1/a ; 1/a)
- 8°) Lorsque a est petit devant l'unité ($a \ll 1$), la parabole est très évasée,
inversement si $a \gg 1$ la parabole est très resserrée sur l'axe de symétrie.
- 9°) La parabole ne contient aucun segment de droite.
- 10°) Les branches s'écartent indéfiniment dans la direction de l'axe Oy.



Mémo / Fonctions du Second Degré (2)

Les fonctions du second degré sont les fonctions du type : $f : x \mapsto y = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$

Cette expression peut prendre l'une des formes suivantes :

(P1) $y = a x^2$

(P2) $y = a x^2 + H$

(P3) $y = a (x - L)^2$

(P4) $y = a (x - L)^2 + H$

(P5) $y = a (x - x')(x - x'')$

(P6) $y = a x^2 + bx + c$ (*Trinôme*)

1°) On passe de (P1) à (P2) par une **Translation** de vecteur $H \vec{j}$ (parallèle à l'axe Oy)
Elle coupe l'axe (Oy) en $y = H$. ($H = \ll \text{Hauteur} \gg$; $L = \ll \text{Longueur} \gg$)

2°) On passe de (P1) à (P3) par une **Translation** de vecteur $L \vec{i}$ (parallèle à l'axe Ox)

3°) On passe de (P1) à (P4) par une **Translation** de vecteur $\vec{V} = L \vec{i} + H \vec{j}$
la Parabole (P4) a pour « sommet » le point $O'(L ; H)$.

En posant $X = x - L$ et $Y = y - H$ on obtient $Y = a X^2$ ainsi la parabole (P4) admet-elle pour axe de symétrie l'axe ($O'Y$) d'équation $x = L$.

On construit (P4) dans le repère ($O'X, O'Y$) comme on a construit (P1) dans le repère (Ox, Oy).

4°) La parabole (P5) coupe l'axe (Ox) en x' et en x'' , son « sommet » se trouve donc au point d'abscisse $L = \frac{x' + x''}{2} = \frac{-b}{2a}$ l'ordonnée du « sommet » est $H = f(L)$.

5°) Pour construire la parabole (P6) on peut au choix :

a. se ramener à la forme (P4) en opérant la décomposition canonique du trinôme.

b. déterminer les coordonnées du « sommet » $O' \left\{ L = \frac{-b}{2a} ; H = f(L) \right\}$ puis les intersections avec Oy : ($x = 0 ; y = c$) et (Ox) solutions éventuelles de l'équation $a x^2 + bx + c = 0$.

