Mémo / Définition et Construction d'une Hyperbole Equilatère (1)

On considère la fonction définie par : $\boxed{f : x \mapsto y = \dfrac{A}{x}}$

I- **Propriétés algébriques** :

1°) Fonction ***impaire*** : pour tout x Réel, $\boxed{f(-x) = -f(x)}$.

2°) Taux d'accroissement ***non constant*** : $\boxed{T_{[f,(x_1,x_2)]} = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \dfrac{-A}{x_1 x_2}}$

3°) Signe de T = Signe de *(- A)* sur [0 ; +∞[et sur]- ∞ ; 0]

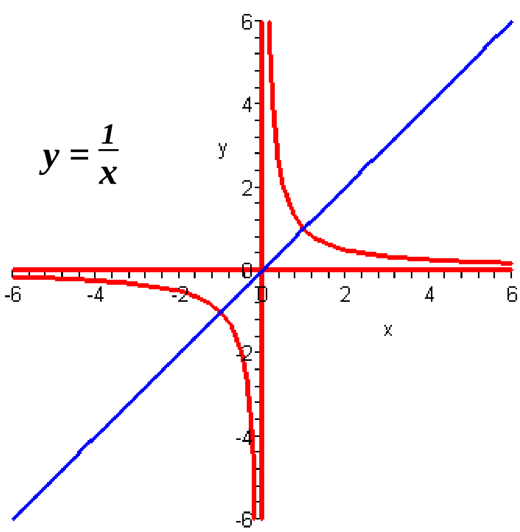
4°) Tableau de variation :

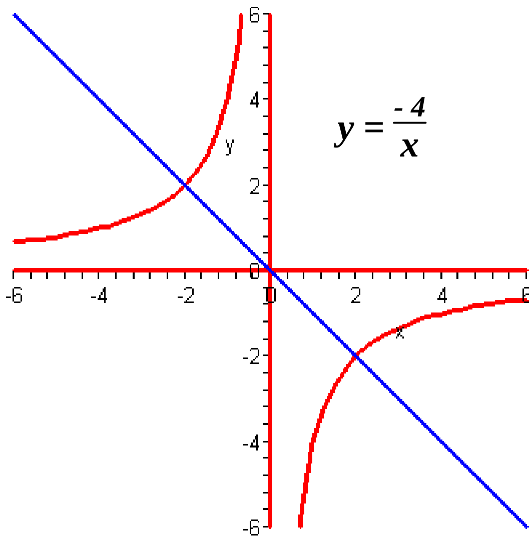
A > 0						**A < 0**					
x	-∞	-1	0	1	+∞	*x*	-∞	-1	0	1	+∞
T		-	‖	-		T		+	‖	+	
f	$0^{(-)}$ ↘	-A ↘	- ∞ ‖ + ∞	↘ A ↘	$0^{(+)}$	*f*	$0^{(+)}$ ↗	-A ↗	+∞ ‖ - ∞	↗ A ↗	$0^{(-)}$

II- **Propriétés géométriques** :

1°) La courbe représentative de f admet le centre O du repère pour centre de symétrie. Cette courbe s'appelle une ***Hyperbole équilatère*** en raison des variations inverses de x et de y.
2°) L'Hyperbole coupe la 1ère bissectrice (*y* = *x*) au point I de coordonnées ($\sqrt{A}$; $\sqrt{A}$) pour A > 0 ou ($\sqrt{-A}$; - $\sqrt{-A}$) pour A < 0
3°) Au point I l'Hyperbole est tangente à la perpendiculaire à la bissectrice.
4°) L'Hyperbole passe par le point J(1 ;A) et son symétrique (-1 ;-A) par rapport à O
5°) Pour A > 0 les points sont symétriques par rapport à la 1ère Bissectrice (y = x)
Pour A < 0 les points sont symétriques par rapport à la 2e Bissectrice (y = - x)
6°) Lorsque |A| est grand devant l'unité (|A| >> 1) , l'Hyperbole est très évasée, inversement si |A| <<1 l'hyperbole est très resserrée sur le centre O.
7°) L'Hyperbole ne contient aucun segment de droite.
8°) L'Hyperbole admet pour asymptotes les axes de coordonnées.

$y = \dfrac{1}{x}$





$y = \dfrac{-4}{x}$

Mémo / Hyperboles & Fonctions Homographiques (2)

Les fonctions **homographiques** sont les fonctions du type : $\boxed{f : x \mapsto y = \dfrac{ax+b}{cx+d}}$ *avec* $c \neq 0$

Cette expression peut prendre l'une des formes suivantes :

(H1) $y = \dfrac{A}{x}$

(H2) $y = \dfrac{A}{x} + H$

(H3) $y = \dfrac{A}{x-L}$

(H4) $y = \dfrac{A}{x-L} + H$

(H5) $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$

1°) On passe de (H1) à (H2) par une **Translation** de vecteur $H.\vec{j}$ (parallèle à l'axe Oy)

2°) On passe de (H1) à (H3) par une **Translation** de vecteur $L.\vec{i}$ (parallèle à l'axe Ox)

3°) On passe de (H1) à (H4) par une **Translation** de vecteur $\vec{V} = L\vec{i} + H\vec{j}$
l'Hyperbole (H4) a pour **centre** le point O'(L ;H) et pour **asymptotes** les droites $x = L$ («verticale », parallèle à (Oy)), et $y = H$ (« horizontale » , parallèle à (Ox)) en effet en posant

$\boxed{X = x - L}$ *et* $\boxed{Y = y - H}$ on obtient $\boxed{Y = \dfrac{A}{X}}$ dans le repère (O'X ; O'Y).

On construit (H4) dans le repère (O'X,O'Y) comme on a construit (H1) dans le repère (*Ox*,*Oy*).

4°) Pour construire l'Hyperbole (H5) on peut au choix :

a. se ramener à la forme (H4) en opérant la décomposition de la fraction (cf. exemples).

b. déterminer les coordonnées du « sommet » $\boxed{O'(\,L = \frac{-d}{c}\ ;\ H = \frac{a}{c}\,)}$ puis les intersections avec les axes : (Oy) : $(0\ ; \frac{b}{d})$ et (Ox) $(\frac{-b}{a}\ ; 0)$.