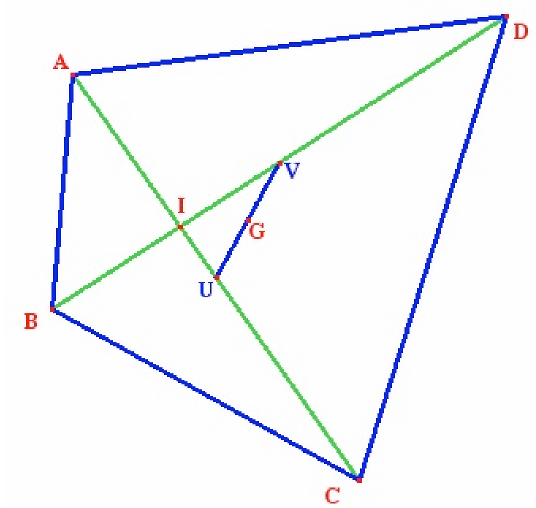

Théorème : le quadrilatère (A,B,C,D) est un parallélogramme si et seulement si son isobarycentre G (centre de gravité) est confondu avec l'intersection I de ses diagonales.

Remarque préliminaire : dans le cas général l'isobarycentre G du quadrilatère ABCD est, *en vertu du théorème d'associativité*, le milieu du segment [UV] qui joint les milieux des diagonales.

1°) Condition NECESSAIRE : *(facile !)*

Hypothèse : (A,B,C,D) est un parallélogramme

Conclusion *(à démontrer)* : son isobarycentre G est confondu avec l'intersection I de ses diagonales.

Démo : puisque (A,B,C,D) est un parallélogramme, ses diagonales se coupent en leur milieu I donc I est l'isobarycentre de {A,D} et de {C,B} donc en vertu du théorème d'associativité des barycentres I est aussi l'isobarycentre de {A,B,C,D} donc I = G.

2°) Condition SUFFISANTE : *(réciproque de la précédente !)*

Hypothèse : l'isobarycentre G de (A,B,C,D) est confondu avec l'intersection I des diagonales.

Conclusion *(à démontrer)* : (A,B,C,D) est un parallélogramme

Démo : pour montrer que (A,B,C,D) est un parallélogramme il suffit de démontrer que ses diagonales se coupent en leur milieu, c'est à dire que les milieux U et V des diagonales sont confondus avec l'intersection I des diagonales.

On a les hypothèses suivantes :

1. I = isobarycentre de (A,B,C,D) donc $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=\vec{0}$ ou I = $\left(\begin{array}{c|c|c|c} A & B & C & D \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$
2. I appartient à [AC] donc il existe un nb Réel x tel que $\overrightarrow{IA}+x\overrightarrow{IC}=\vec{0}$
3. I appartient à [BD] donc il existe un nb Réel y tel que $\overrightarrow{IB}+y\overrightarrow{ID}=\vec{0}$
4. Par addition membre à membre on obtient : $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+x\overrightarrow{IC}+y\overrightarrow{ID}=\vec{0}$

Mais ce qui voudrait dire que I serait également barycentre du système $\left(\begin{array}{c|c|c|c} A & B & C & D \\ 1 & 1 & x & y \end{array}\right)$ mais cela entraîne que $x = 1$ et $y = 1$, car un même point ne peut être à la fois le barycentre quelconque et l'isobarycentre d'un système (*).

Par suite I est le milieu de [AC] et de [BD], donc les diagonales se coupent en leur milieu donc (ABCD) est un parallélogramme.

(*) NB : on peut aussi écrire que par soustraction membre à membre des égalités (1) et (4) on obtient $(x-1)\overrightarrow{IC}+(y-1)\overrightarrow{ID}=\vec{0}$, or cela signifierait que les points I,D,C seraient alignés, ce qui est absurde. Donc on a nécessairement $(x-1)=0$ et $(y-1)=0$ c'est à dire que $x = 1$ et $y = 1$.