Trigonométrie des familles

1) $A = -2(\sin\alpha + \cos\alpha)$; $B = \tan x$

2) • $\boxed{\sin x = \cos k\pi} \iff |\sin x| = 1 \iff x \equiv \pi/2\ [\pi]$

• $\boxed{2\cos x + \sqrt{3} = 0} \iff \cos x = -\sqrt{3}/2 = \cos 5\pi/6 \iff x \equiv \pm 5\pi/6\ [2\pi]$ (2 sol. à 2π près)

• $\boxed{2\cos 2x = -1} \iff \cos 2x = -1/2 = \cos(2\pi/3) \iff 2x \equiv \pm 2\pi/3\ [2\pi] \iff x \equiv \pm\pi/3\ [\pi]$ *(4 sol. à 2π près)*

$$\sin 2x = \cos 3x \iff \cos 3x = \cos(\frac{\pi}{2} - 2x) \iff 3x = \pm(\frac{\pi}{2} - 2x) + k.2\pi$$

$$\iff 5x = \frac{\pi}{2} + k.2\pi \quad ou \quad x = -\frac{\pi}{2} + k.2\pi$$

$$\iff x = \frac{\pi}{10} + k.\frac{2\pi}{5} \quad ou \quad x = -\frac{\pi}{2} + k.2\pi$$

Il y a donc 6 solutions en tout : les 5 sommets du pentagone construit à partir de $\pi/10$ et $-\pi/2$.

• $\boxed{\cos 3x = \cos\frac{\pi}{4} \iff 3x = \pm\frac{\pi}{4} + k.2\pi \iff x = \pm\frac{\pi}{12} + k.\frac{2\pi}{3}}$

Il y a donc 6 solutions en tout : les 3 sommets du triangle équilatéral construit à partir de $\pi/12$
Et les 3 sommets du triangle équilatéral construit à partir de $-\pi/12$.

Exercice bête et méchant (ne sera pas demandé en contrôle).

• $\boldsymbol{\cos x/3 + \sin x/2 = 0} \iff \cos x/3 = -\sin x/2 \iff \cos x/3 = \cos(\pi/2 + x/2)$

$\iff x\sqrt{}/3 = \pi/2 + x/2 + k.2\pi$ *ou* $x/3 = -(\pi/2 + x/2) + k.2\pi$

$\iff x/3 - x/2 = \pi/2 + k.2\pi$ *ou* $x/3 + x/2 = -\pi/2 + k.2\pi$

$\iff -x/6 = \pi/2 + k.2\pi$ *ou* $5x/6 = -\pi/2 + k.2\pi$

$\iff x = -3\pi - k.12\pi$ *ou* $x = -3\pi/5 + k.12\pi/5$

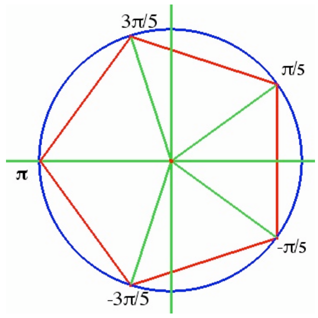
$\iff x = \pi + n.2\pi$ *ou* $x = -3\pi/5 + n.2\pi/5$

$\iff x = \pi + n.2\pi$ *ou* $x = \pi/5 + m.2\pi/5$

$\iff x = \pi/5 + m.2\pi/5$ *les déterminations principales sont donc les sommets du pentagone régulier dont l'un des sommets coïncide avec π.*

Les solutions sont donc : { $\pi/5$; $3\pi/5$; π ; $-3\pi/5$; $-\pi/5$ } (mod. 2π) Excusez du peu ....

Vérification : pour $x = -3\pi/5$, on a $Cos(x/3) + Sin(x/2) = Cos(-\pi/5) + Sin(-3\pi/10) =$
$Cos(\pi/5) - Sin(3\pi/10) = 0.8090169943 - 0.8090169944 = 10^{-10} = 0,0000000001$



• $\boxed{\cos 2x + \cos x = 0}$

$$\iff \cos 2x = -\cos x \iff \cos 2x = \cos(\pi + x)$$

$$\iff 2x = x + \pi + k.2\pi \quad ou \quad 2x = -x - \pi + k.2\pi$$

$$\iff x = \pi + k.2\pi \quad ou \quad 3x = -\pi + k.2\pi$$

$$\iff x = \pi + k.2\pi \quad ou \quad x = -\frac{\pi}{3} + k.\frac{2\pi}{3} \iff x \in \{-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}; \pi\} \bmod .2\pi$$

Les solutions sont donc les sommets du triangle équilatéral construit à partir de $-\pi/3$.

• $\boxed{\tan x = \sqrt{3}}$ *$\iff \tan x = \tan\pi/3 \iff x \equiv \pi/3\ [\pi]$ (2 sol. à 2π près)*

• $\boxed{\tan\frac{x}{2} = \tan\frac{\pi}{4} \iff \frac{x}{2} \equiv \frac{\pi}{4}[\pi] \iff x \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]}$

• $\boxed{4\cos^2 x + 4\cos x - 3 = 0}$ *On pose $X = \cos x$ avec $|X| \leq 1$*
d'où $4X^2 + 4X - 3 = 0 \iff (2X+1)^2 = 4 \iff (2X+1) = 2$ ou $(2X+1) = -2$
i.e. $X = ½$ ou $X = -3/2$ (impossible) d'où $\cos x = ½ \iff x = \pm\pi/3$ mod. 2π.

• $\boxed{4\cos^2 x + 4\cos x - 3 = 0}$ *On pose $X = \cos x$ avec $|X| \leq 1$*
d'où $4X^2 + 4X - 3 = 0 \iff (2X+1)^2 = 4 \iff (2X+1) = 2$ ou $(2X+1) = -2$
i.e. $X = ½$ ou $X = -3/2$ (impossible) d'où $\cos x = ½ \iff x = \pm\pi/3$ mod. 2π.

• $\boxed{Cos\ 2x = 2\sin x}$ $\iff 1 - 2\sin^2 x = 2\sin x \iff 2\sin^2 x + 2\sin x - 1 = 0$
On pose $X = \sin x$ *avec $|X| \leq 1$* et on résout cette équation : $2X^2 + 2X - 1 = 0$. *$X = (\sqrt{3} - 1)/2$ ou $X = -(\sqrt{3}+1)/2$ (impossible).*
On cherche alors à l'aide de la calculatrice (fonction $\sin^{-1}$) l'arc (en radians) dont le sinus est $(\sqrt{3} - 1)/2$.
On trouve que $\sin\pi/9 \approx (\sqrt{3} - 1)/2$ d'où les solutions : $x = \pi/9$ (mod. 2π) ou $x = \pi - \pi/9 = 8\pi/9$ (mod. 2π).

3) *Cos 4x.Cos 2x – Sin 4x. Sin 2x = Cos (4x + 2x) = Cos 6x*

Sin 5x . Cos 7x – Sin 7x . Cos 5 = Sin (5x – 7x) = Sin (-2x) = - sin(2x).

$$\frac{\sin 2x}{\sin x} - \frac{\cos 2x}{\cos x} = \frac{\sin 2x.\cos x - \cos 2x.\sin x}{\sin x.\cos x} = \frac{\sin(2x - x)}{\sin x.\cos x} = \frac{\sin x}{\sin x.\cos x} = \frac{1}{\cos x}$$

$$\frac{\sin 2x}{\cos x} + \frac{\cos 2x}{\sin x} = \frac{\sin 2x.\sin x + \cos 2x.\cos x}{\sin x.\cos x} = \frac{\cos(2x - x)}{\sin x.\cos x} = \frac{\cos x}{\sin x.\cos x} = \frac{1}{\sin x}$$

$$\frac{\sin 3x}{\cos x} + \frac{\cos 3x}{\sin x} = \frac{\sin 3x.\sin x + \cos 3x.\cos x}{\sin x.\cos x} = \frac{\cos(3x - x)}{\sin x.\cos x} = \frac{\cos 2x}{\sin x.\cos x} = 2\frac{\cos 2x}{\sin 2x} = \frac{2}{\tan 2x}$$

$$\frac{1 + \cos 2x}{1 - \cos 2x} = \frac{2\cos^2 x}{2\sin^2 x} = \frac{1}{\tan^2 x}$$

$$\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} = \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{2\cos^2 \frac{x}{2}} = \tan^2 \frac{x}{2}$$

$$\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} = \frac{1 - \cos(\frac{\pi}{2} - x)}{1 + \cos(\frac{\pi}{2} - x)} = \frac{2\sin^2(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2})}{2\cos^2(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2})} = \tan^2(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2})$$

$$\frac{2 + \sin 2x - 2\cos 2x}{1 + 2\sin 2x - \cos 2x} = \frac{2(1 - \cos 2x) + \sin 2x}{1 - \cos 2x + 2\sin 2x} = \frac{4\sin^2 x + 2\sin x.\cos x}{2\sin^2 x + 4\sin x.\cos x} = \frac{\sin x(2\sin x + \cos x)}{\sin x(\sin x + 2\cos x)} = \frac{2\sin x + \cos x}{\sin x + 2\cos x} = \frac{2\tan x + 1}{\tan x + 2}$$

$$\frac{1 + \cos x - \sin x}{1 - \cos x - \sin x} = \frac{2\cos^2 \frac{x}{2} - 2\sin\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{2}}{2\sin^2 \frac{x}{2} - 2\sin\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{2}} = \frac{\cos\frac{x}{2}(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2})}{\sin\frac{x}{2}(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2})} = -\frac{1}{\tan\frac{x}{2}}$$

4) $cos^2x + 2\ sin^2x = cos2x + 3\ sin^2x = cos2x + \frac{3}{2}(1 - cos2x) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}cos2x = \frac{3 - cos2x}{2}$

$3\ cos^2x - 2\ sin^2x = cos^2x + 2\ cos2x = \frac{1 + cos2x}{2} + 2cos2x = \frac{1 + 5cos2x}{2}$

$cos^4x - sin^4x = (cos^2x - sin^2x)\ (cos^2x + sin^2x) = cos^2x - sin^2x = cos2x$