• Barycentres •

I - Soit ABC un triangle quelconque, B' le milieu de AC, C' le milieu de AB.

Soit I le barycentre du système {(A,2),(B,2),(A,1),C,1)}.
Soit D le barycentre du système {(A,3),(B,2)}.
Soit E le barycentre du système {(B,2),(C,1)}.

1°) Faire la figure et construire les points D et E.
2°) Démontrer que le point I est l'intersection des segments [CD] et [B'C'].
3°) Démontrer que les points A,I,E sont alignés.

II - Soit ABC un triangle rectangle et isocèle en A, avec AB = AC = a.
Soit D le barycentre du système {(A,2); (B,-1)}. Soit E le barycentre du système {(A,2); (B,-1);(C,2)}.
Soit G l'isobarycentre de {A,B,C}.Soit I le milieu de [AC].

1°) a) Construire les points G, D et E.
b) Démontrer que les points D,E,C sont alignés.
c) Montrer que les points B,I,E sont alignés.
d) Montrer que I est le milieu de [GE] et que G est le milieu de [BE].
e) Démontrer que $DE = \frac{2a\sqrt{2}}{3}$.

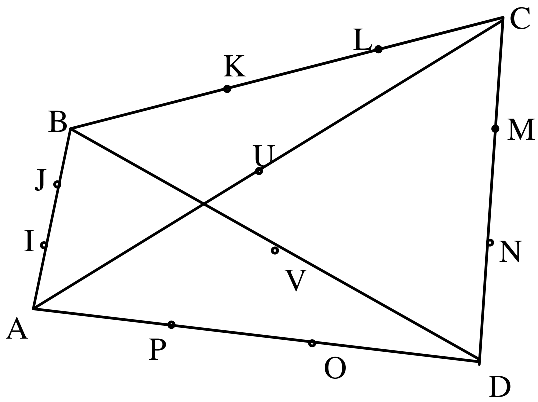
2°) Déterminer et construire l'ensemble (Δ) des points M du plan vérifiant la condition
$$\left\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\right\| = \left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\|$$

3°) On appelle H le barycentre du système {(E,1);(G,2)}, et K celui de {(E,1);(G,-2)}. Montrer que K=B, puis déterminer et construire l'ensemble (C) des points M du plan vérifiant la condition
$$\left\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\right\| = 2\left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\|$$

III - Dessiner un triangle ABC et placer les milieux B' et C' des côtés [AC] et [AB].
Soit I le barycentre du système {(A;3);(B;2);(C;1)}.

1°) Démontrer que le point I appartient au segment [B'C']. Déterminer sa position et le placer sur la figure.
2°) Soit D le barycentre de {(A;3) ; (B;2)}. Démontrer que D est l'intersection des droites (AB) et (CI). Placer le point D sur la figure.
3°) Soit E l'intersection de (AI) et de (BC) démontrer que E est le barycentre de {(C;1);(B;2)}.

IV - Dans la figure ci-contre on suppose que les subdivisions sur les côtés du quadrilatère ABCD sont régulières. On désigne par U et V les milieux respectifs des diagonales [AC] et [BD].
On appelle G le barycentre de {(U;2) ; (V;1)} et H celui de {(U;1) ; (V;2)}.



1. Démontrer que G est le milieu de [IM] et de [LP].
2. Quelle propriété analogue peut-on en déduire pour H ?
3. Démontrer que G et H sont confondus si et seulement si U et V le sont.
4. Que peut-on en déduire alors pour le quadrilatère ABCD ?
5. On considère maintenant le repère de centre A, de base $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD})$ et on suppose que le point C a pour coordonnées (a;b) dans ce repère.
   a) Indiquer les coordonnées des points K,U,V,O en fonction de a et b et établir analytiquement si ces points sont alignés ou non en fonction de a et b.
   b) Calculer les coordonnées de G et H en fonction de a et b.
   c) Pour quelles valeurs de a et b les points G et H sont-ils confondus ?

V – Démontrer que dans un tétraèdre quelconque les droites qui joignent un sommet au centre de gravité de la face opposée sont concourantes en un point qui est le centre d'inertie du système (isobarycentre) et