• Suites Numériques •

I - Suites définies directement et suites définies par récurrence à l'aide d'une même fonction.

Soit f la fonction définie par $\boxed{f(x) = \dfrac{2x+3}{x+4}}$ pour $x \geq 0$.

A- Etude de la suite (u_n) définie par $u_n = f(n) = \dfrac{2n+3}{n+4}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1°) Représenter la fonction f sur $[0,+\infty[$ (unités 4cm) et les premiers termes de (u_n) Indiquer d'après la figure le comportement de la suite (u_n) : bornes ? Sens de variation ? Limite ?

2°) Démontrer que (u_n) est croissante.

3°) Démontrer que (u_n) est majorée par 2.

4°) Déterminer à partir de quel rang N on a la double inégalité $2-\varepsilon < u_n < 2$, avec $\varepsilon = 10^{-2}$.

5°) Démontrer que pour tout $n \geq 1$ on a $|u_n - 2| \leq \dfrac{5}{n}$. Conclusion ?

B- Etude de la suite définie par $\boxed{v_{n+1} = f(v_n) = \dfrac{2v_n+3}{v_n+4}}$ pour tout $n \geq 1$ et $v_0 = 4$.

1°) a) Représenter la fonction f sur $[0,+\infty[$ (unités 4cm) et les premiers termes de (v_n).

b) Calculer les coordonnées de l'intersection de (C_f) avec la bissectrice $y = x$.

c) Indiquer d'après la figure le comportement de la suite (v_n) : bornes ? Sens de variation ? Limite ?

2°) Démontrer par récurrence à l'aide du sens de variation de f que pour tout $n \geq 0$ on a $1 \leq v_n \leq 4$ (P_n) [On établira pour cela que la propriété (P_n) est vraie pour $n = 0$ et héréditaire i.e. (P_n) implique (P_{n+1})]

3°) Démontrer par récurrence que (v_n) est décroissante.

4°) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = \dfrac{v_n - 1}{v_n + 3}$. Démontrer que (w_n) est une suite géométrique dont on indiquera la raison et le premier terme.

5°) Exprimer w_n en fonction de n. En déduire sa limite. Exprimer v_n en fonction de w_n. Puis en déduire la limite de v_n.

II - Suites géométriques et Numération décimale

1°) Soit a un chiffre compris entre 1 et 9. On pose $u_n = a.10^{-n}$ et $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$.
Écrire S_n en fonction de n et de a. Déterminer la limite S de S_n en fonction de a.

2°) Écrire le nombre 0,333 333 333 sous la forme de S_n précédente et déduire du résultat trouvé en 1° que l'écriture décimale illimitée 0, 333 333 333…333…(une infinité de 3) représente un nombre rationnel que l'on déterminera. En déduire de même que 0,999999999999…999999…999… = 1

III - Etude directe de $u_n = 2n + 3 - \sqrt{4n^2 + 4n + 5}$

Démontrer que quelque soit n on a $|u_n - 2| \leq \dfrac{2}{n}$. En déduire la limite de la suite (u_n).

IV - Suite définie par récurrence : $u_{n+1} = \sqrt{6 - u_n}$ avec $u_0 = 0$.

1°) Représenter graphiquement les premiers termes de la suite (u_n).

2°) Démontrer que la propriété (P_n) : $0 \leq u_n \leq 3$ est héréditaire.

3°) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $|u_n - 2| \leq \dfrac{1}{2}|u_{n-1} - 2|$

4°) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $|u_n - 2| \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}$. Conclusion ?

V - Somme des carrés des n premiers entiers.

1°) Déterminer le polynôme P(x) du troisième degré tel que P(0) = 0, et pour tout x réel

$$P(x+1) - P(x) = x^2$$

2°) En utilisant cette relation calculer la somme :

$$\mathbf{S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2}.$$

3°) Montrer que le résultat obtenu peut se mettre sous la forme $S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

4°) Démontrer cette formule par récurrence.