Polynômes / zéros • Fractions Rationnelles / pôles

I - Soit $P(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{5}{3}$ Montrer que *P(x)* admet un zéro évident et déterminer les autres zéros éventuels. Montrer ensuite que le point I(1 ; 0) est centre de Symétrie pour la courbe représentative.

II- Déterminer un polynôme du 3e degré dont les zéros sont : 3 ; 1 ; -2 et coupant l'axe des ordonnées en +4.

III – On se propose d'étudier les variations de la fonction définie par :

$$F(x) = \frac{x^2 + x - 5}{x - 1}$$

1°) Montrer que F(x) peut se mettre sous la forme $F(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$ où a;b;c sont des constantes que l'on déterminera.

2°) On pose $u(x) = ax + b$ et $v(x) = \frac{c}{x-1}$ montrer que les deux fonctions u et v sont strictement croissantes et en déduire le sens de variation de F = u + v.

3°) Dresser le tableau de variation de F et esquisser la courbe C_F ainsi que les asymptotes éventuelles.

4°) Montrer que C_F admet le point I(1 ;3) pour centre de symétrie.

IV - Soit $$P(x) = x^4 + 6x^3 - 11x^2 - 60x + 100$$

1°) Déterminer un polynôme Q(x) tel que pour tout x Réel on ait $P(x) = [Q(x)]^2$

2°) Résoudre l'équation $$P(x) = 0$$

3°) On pose : $$D(x) = x^3 + 4x^2 - 7x - 10.$$

Montrer que D(x) peut se mettre sous la forme $(x + 1) \bullet Q(x)$.

4°) Simplifier la fraction $$F(x) = \frac{x^4 + 6x^3 - 11x^2 - 60x + 100}{x^3 + 4x^2 - 7x - 10}$$

et montrer qu'elle peut se mettre sous la forme $ax + b + \frac{c}{x+1}$.

V - Soit $$P_n(x) = (x + 1)^{2n} + (x + 2)^n - 1$$

a) Montrer que P_n est factorisable par $(x + 1)(x + 2)$.

b) Effectuer la factorisation pour n = 2 et déterminer les racines éventuelles de P_2.

VI- Résoudre l'équation réciproque : $x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 1 = 0$

On pourra pour cela poser $g(x) = \frac{f(x)}{x^2}$ et effectuer le changement de variable défini par $X = x + \frac{1}{x}$ dans g(x) en justifiant cette méthode.

*** VII - Soit $P(x) = x^3 - px + q$ avec $p > 0$ et $q > 0$

a) Déterminer a et b tels que P soit divisible par $(x - a)^2$ et par $(x - b)$ avec a ? b.
[Dans ce cas on dit que a est une racine double; et b une racine simple de P] .

b) En déduire qu'une Condition Nécessaire pour qu'il en soit ainsi est que

$$4p^3 - 27q^2 = 0$$

c) Démontrer que cette Condition est aussi Suffisante pour qu'il existe a et b tels que; pour tout x; on ait $$P(x) = (x - a)^2(x - b)$$

d) A.N. Résoudre les équations : $x^3 - 12x + 16 = 0$ et $x^3 - 12x - 16 = 0$