Mémo / Définition et Construction d'une Parabole (1)

On considère la fonction définie par : $\boxed{f : x \mapsto y = ax^2}$

I- Propriétés algébriques :

1°) Fonction ***paire*** : pour tout *x* Réel, $\boxed{f(-x) = f(x)}$.

2°) Taux d'accroissement **NON *constant*** : $\boxed{T_{[f,(x_1,x_2)]} = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = a(x_1 + x_2)}$

3°) Signe de T = Signe de a sur [0 ; +∞[et Signe de T = Signe de (-a) sur]- ∞ ; 0]

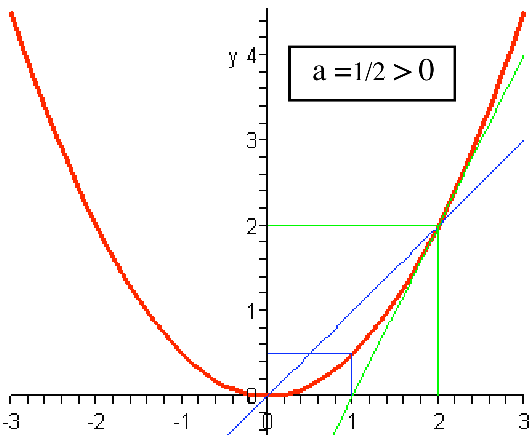
4°) Tableau de variation :

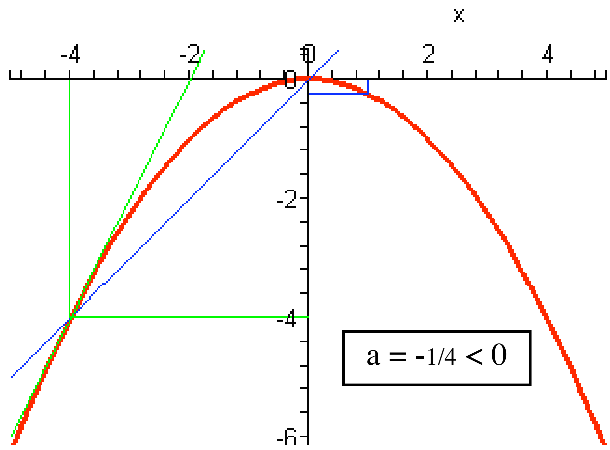
a > 0						
x	-∞	-1	0	1	+ ∞	
T	-		‖		+	
f	+∞	a ↘	0	a ↗	+ ∞	

a < 0						
x	-∞	-1	0	1	+∞	
T	+		‖		-	
f	- ∞	a ↗	0	a ↘	- ∞	

II- Propriétés géométriques :

1°) La courbe représentative de f admet l'axe des ordonnées (Oy) pour axe de symétrie.
Pour cette raison cette courbe s'appelle une ***Parabole***.
2°) La Parabole est tangente en O à l'axe (Ox)
3°) La Parabole passe par le point A(1 ; a).
4°) Si a > 0 la parabole a sa concavité dirigée vers les y > 0 : *« le bol tient l'eau »*
Si a < 0 la parabole a sa concavité dirigée vers les y < 0 : *« le bol ne tient pas l'eau »*
5°) La Parabole coupe la $1^{ère}$ bissectrice ($y = x$) au point B(1/a ; 1/a)
6°) Au point B la parabole est tangente à la droite qui joint ce point au milieu du segment de la sous-tangente, c'est-à-dire au point d'abscisse 1/2a
7°) Par symétrie par rapport à (Oy) on obtient les points A'(-1;a) et B'(-1/a ; 1/a)
8°) Lorsque a est petit devant l'unité (a << 1) , la parabole est très *évasée*, inversement si a >>1 la parabole est très *resserrée* sur l'axe de symétrie.
9°) La parabole ne contient aucun segment de droite.
10°) Les branches s'écartent indéfiniment dans la direction de l'axe (Oy).





Mémo / Fonctions du Second Degré (2)

Les fonctions du second degré sont les fonctions du type : $\boxed{f : x \mapsto y = ax^2 + bx + c}$ *avec* $\boldsymbol{a \neq 0}$
Cette expression peut prendre l'une des formes suivantes :

(P1) $\boldsymbol{y = a\,x^2}$

(P2) $\boldsymbol{y = a\,x^2 + H}$

(P3) $\boldsymbol{y = a\,(x - L)^2}$

(P4) $\boldsymbol{y = a\,(x - L)^2 + H}$

(P5) $\boldsymbol{y = a\,(x - x')(x - x'')}$

(P6) $\boldsymbol{y = a\,x^2 + bx + c}$ ***(Trinôme)***

1°) On passe de (P1) à (P2) par une **Translation** de vecteur $H\,\vec{j}$ (*parallèlement à l'axe Oy*)
Elle coupe l'axe (Oy) en y = H. *(H = « Hauteur » ; L = « Longueur »)*

2°) On passe de (P1) à (P3) par une **Translation** de vecteur $L.\,\vec{i}$ (*parallèlement à l'axe Ox*)

3°) On passe de (P1) à (P4) par une **Translation** de vecteur $\vec{V} = L\,\vec{i} + H\,\vec{j}$
la Parabole (P4) a pour « sommet » le point O'(L ;H).

En posant $\boxed{\boldsymbol{X = x - L}}$ et $\boxed{\boldsymbol{Y = y - H}}$ on obtient $\boldsymbol{Y = a\,X^2}$ ainsi la parabole (P4) admet-elle pour axe de symétrie l'axe (O'Y) d'équation x = L.

On construit (P4) dans le repère (O'X,O'Y) comme on a construit (P1) dans le repère (*Ox,Oy*).

4°) La parabole (P5) coupe l'axe (Ox) en x' et en x'', son « sommet » se trouve donc au point d'abscisse $\boxed{L = \dfrac{x'+x''}{2} = \dfrac{-b}{2a}}$ l'ordonnée du « sommet » est $\boxed{H = f(L).}$

5°) Pour construire la parabole (P6) on peut au choix :

a. se ramener à la forme (P4) en opérant la décomposition canonique du trinôme.

b. déterminer les coordonnées du « sommet » $\boldsymbol{O'\{L = \dfrac{-\,b}{2a}\ ;\ H = f(L)\ \}}$ puis les intersections avec Oy : (x = 0 ; y = c) et (Ox) solutions éventuelles de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.