Mémo / Définition et Construction d'une Hyperbole Equilatère (1)

On considère la fonction définie par : $\boxed{f : x \mapsto y = \frac{A}{x}}$

I- **Propriétés algébriques** :

1∞) Fonction ***impaire*** : pour tout x Réel, $\boxed{f(-x) = - f(x)}$.

2∞) Taux d'accroissement ***non constant*** : $\boxed{T_{[f,(x_1,x_2)]} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{-A}{x_1 x_2}}$

3∞) Signe de T = Signe de *(- A)* sur] 0 ; +∞[et sur]- ∞ ; 0 [

4∞) Tableau de variation :

A > 0

x	-∞	-1	0	1	+∞
T	—		‖	—	
f	$0^{(-)}$ ↘	-A ↘ -∞	‖	+ ∞ ↘ A	↘ $0^{(+)}$

A < 0

x	-∞	-1	0	1	+∞
T	+		‖	+	
f	$0^{(+)}$ ↗	-A ↗ + ∞	‖	- ∞ ↗ A	↗ $0^{(-)}$

II- **Propriétés géométriques** :

1∞) La courbe représentative de f admet le centre O du repère pour centre de symétrie. Cette courbe s'appelle une ***Hyperbole équilatère*** en raison des variations inverses de x et de y.

2∞) L'Hyperbole coupe la 1ère bissectrice (*y = x*) au point I de coordonnées :

$(\sqrt{A}, \sqrt{A})$ pour A > 0 ou $(\sqrt{-A}, -\sqrt{-A})$ pour A < 0

3∞) Au point I l'Hyperbole est tangente à la perpendiculaire à la bissectrice.

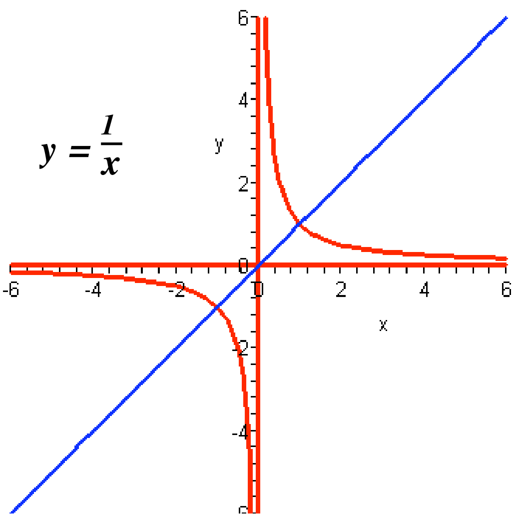
4∞) L'Hyperbole passe par le point J(1 ;A) et son symétrique (-1 ;-A) par rapport à O

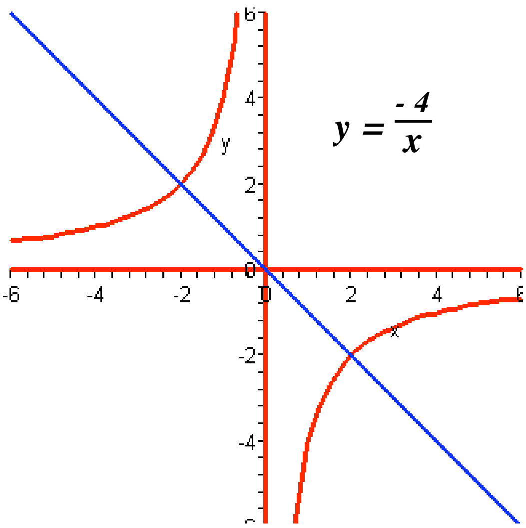
5∞) Pour A > 0 les points sont symétriques par rapport à la 1ère Bissectrice (y = x)
Pour A < 0 les points sont symétriques par rapport à la 2e Bissectrice (y = - x)

6∞) Lorsque |A| est grand devant l'unité (|A| >> 1) , l'Hyperbole est très évasée, inversement si |A| <<1 l'hyperbole est très resserrée sur le centre O.

7∞) L'Hyperbole ne contient aucun segment de droite.

8∞) L'Hyperbole admet pour **asymptotes** les axes de coordonnées.





Mémo / Hyperboles & Fonctions Homographiques (2)

Les fonctions **homographiques** sont les fonctions du type : $\boxed{f : x \mapsto y = \dfrac{ax+b}{cx+d}}$ *avec* $\boldsymbol{c \neq 0}$

Cette expression peut prendre l'une des formes suivantes :

$$(H1) \qquad y = \frac{A}{x}$$

$$(H2) \qquad y = \frac{A}{x} + H$$

$$(H3) \qquad y = \frac{A}{x-L}$$

$$(H4) \qquad y = \frac{A}{x-L} + H$$

$$(H5) \qquad y = \frac{ax+b}{cx+d}$$

1∞) On passe de (H_1) à (H_2) par une **Translation** de vecteur $H.\vec{j}$ (parallèle à l'axe Oy)

2∞) On passe de (H_1) à (H_3) par une **Translation** de vecteur $L.\vec{i}$ (parallèle à l'axe Ox)

3∞) On passe de (H_1) à (H_4) par une **Translation** de vecteur $\vec{V} = L\vec{i} + H\vec{j}$
l'Hyperbole (H_4) a pour **centre** le point O'(L ;H)

4∞) Il y a 2 **asymptotes** : les droites $\boxed{\boldsymbol{x = L}}$ («verticale », parallèle à (Oy)),
et $\boxed{\boldsymbol{y = H}}$ (« horizontale » , parallèle à (Ox)) en effet en posant
$\boxed{X = x - L}$ *et* $\boxed{Y = y - H}$. on obtient $\boxed{Y = \dfrac{A}{X}}$ dans le repère (O'X ; O'Y).
On construit (H4) dans le repère (O'X,O'Y) comme on a construit (H1) dans le repère (*Ox,Oy*).

5∞) Pour construire l'Hyperbole (H5) on peut au choix :

a. se ramener à la forme (H4) en opérant la décomposition de la fraction (cf. exemples).

b. déterminer les coordonnées du « sommet » $O'\left(L = \frac{-d}{c} \ ; H = \frac{a}{c} \right)$ puis les intersections avec les axes : (Oy) : $\left(0 \ ; \frac{b}{d}\right)$ et (Ox) $\left(\frac{-b}{a}, 0\right)$.