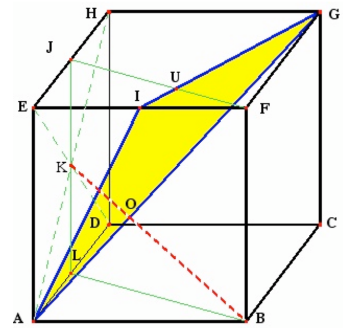

Dans le cube ci-dessus, I est le milieu de [EF], K est le milieu de la face AEHD du cube, J le milieu de [EH], L le milieu de [AD], U l'intersection de (IG) et (JF).

On veut démontrer que les droites (BK) et (AG) sont sécantes en un point O, puis que la droite (BK) est perpendiculaire en O au plan (AIG).

A. *Méthode directe (indiquer les théorèmes utilisés).*

1°) *Démontrer que les droites (BK) et (AG) sont dans un même plan que l'on précisera.*

*Le point K∈ (AH) donc K ∈ (ABG**H**) et par définition B ∈ (A**B**GH), or un plan ne peut contenir deux points sans contenir toute la droite passant par ces deux points, donc (BK)⊂ (ABGH), de même (AG))⊂ (ABGH) et (BK) et (AG) sont donc sécantes en O dans ce plan, puisque par construction elles ne sont pas parallèles.*

2°) *Démontrer que dans le rectangle (ABGH) les droites (BK) et (AG) sont perpendiculaires en un point O.*

Dans le rectangle (ABGH), les triangles rectangles (KAB) et (GHA) sont semblables dans le rapport √2/2

*En effet, soit **a** la longueur des arêtes du cube. AH étant la diagonale du carré de côté a, AH = a√2, d'où AK = a√2/2.*

On peut calculer la longueur de tous les côtés de ces triangles en utilisant le théorème de Pythagore.

On trouve ainsi : BK = a√3/√2, AG = a√3. Ainsi tous les rapports AK / HG, BK / AG, BA / AH sont égaux à √2/2

Par suite les angles des sommets homologues sont égaux deux à deux, or ces angles sont complémentaires puisque les triangles sont rectangles, donc dans le triangle AOB, l'angle en 0 est le supplément par rapport à 180° de la somme des deux angles en A et en B dont la somme est 90°. Ainsi les droites BK et AG sont elles bien perpendiculaires en O.

3°) *Démontrer que dans le carré EFGH, (JF) et (IG) sont perpendiculaires en U.*

Même démonstration que ci-dessus sauf que les triangles JEF et IFG sont des triangles rectangles isométriques.

4°) *Démontrer que (L J) est perpendiculaire au plan EFGH*

Dans le cube, la droite (LJ) est parallèle à (AE) qui est perpendiculaire au plan (EFGH), donc (LJ) ⊥ (EFGH)

5°) *En déduire que (GI) est perpendiculaire au plan (LJFB)*

[(LJ) ⊥ (EFGH) et (GI) ⊂ (EFGH] ⇒ (GI) ⊥ (IL) , de plus d'après 3°) (GI) ⊥ (JF) donc (GI) ⊥ (FJLB).

6°) *En déduire que (GI) est orthogonale à (BK)*

[(GI) ⊥ (FJLB) et (BK) ⊂ (FJLB).] ⇒ (GI) ⊥ (BK).

7°) *En déduire que (BK) est perpendiculaire au plan (AIG) en O.*

[(BK) ⊥ (GI) et (BK) ⊥ (AG)] ⇒ (BK) ⊥ (AIG).

B. *Méthode Analytique* dans le repère orthonormé $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$

1°) *Coordonnées des points B(1 ;0 ; 0), K(0 ; 1/2 ; 1/2), G(1 ;1 ;1), I (1/2 ; 0 ; 1).*

2°) *Coordonnées des vecteurs :* $\overrightarrow{BK}\begin{pmatrix}-1\\1/2\\1/2\end{pmatrix}, \overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}1/2\\0\\1\end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

3°) $\overrightarrow{BK}\circ\overrightarrow{AI}=(-1)\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times 0+\frac{1}{2}\times 1=0$ et $\overrightarrow{BK}\circ\overrightarrow{AG}=(-1)\times 1+\frac{1}{2}\times 1+\frac{1}{2}\times 1=0$ *donc* $\overrightarrow{BK}\perp\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{BK}\perp\overrightarrow{AG}$

4°) *En déduire que (BK) est perpendiculaire la droite (AG).*

En effet les vecteurs directeurs sont orthogonaux et les droites sont coplanaires se coupent en O, donc elles sont bien perpendiculaires en O.

5°) *Écrire le système des équations paramétriques de la droite (BK).* $M\in(BK)\Leftrightarrow\overrightarrow{BM}=k\overrightarrow{BK}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1-k\\y=k/2\\z=k/2\end{cases}$

6°) *Démontrer que le plan (AIG) a pour équation cartésienne 2x – y – z = 0*

Il suffit de montrer que les coordonnées des trois points A, I, G qui ne sont pas alignés vérifient cette équation, en effet c'est une équation du 1° en x, y, z, donc c'est l'équation d'un plan, et ce plan contient A,I, G donc c'est une équation de ce plan.

7°) *Déterminer la valeur du paramètre k pour que le point M défini par la relation vectorielle* $\overrightarrow{BM}=k\overrightarrow{BK}$ *soit dans (AIG).*

Il suffit de remplacer les coordonnées d'un point courant de la droite BK en fonction de k dans l'équation du plan :

2(1-k) – k/2 – k/2 =0 ⇔ k = 2/3

8°) *En déduire les coordonnées du point O intersection de (BK) avec le plan (AIG).*

Il suffit de remplacer alors k par la valeur trouvée k = 2/3 *dans les coordonnées des points de (BK) donc O(1/3 ; 1/3 ; 1/3).*

9°) *Écrire une équation cartésienne du plan (ABGH).*

Ce plan contenant l'axe (0x) il suffit d'écrire l'équation de sa trace dans le plan de coordonnées (ADE) : $\boxed{y = z}$.

10°) *Écrire une équation cartésienne du plan (BFJL)*

Ce plan étant parallèle à l'axe (0z) il suffit d'écrire l'équation de sa trace dans le plan horizontal (ABD) : $\boxed{x + 2y = 1}$.

11°) *En déduire un système d'équations cartésiennes de la droite (BK)*

(BK) étant l'intersection des plans (ABGH).et (BFJL) un système des équations cartésiennes de (BK) est $\begin{cases}y=z\\x+2y=1\end{cases}$

12°) *Retrouver les coordonnées du point d'intersection de (BK) avec le plan (AIG).*

Il suffit de résoudre le système des 3 équations cartésiennes : $\begin{cases}y=z\\x+2y=1\\2x-y-z=0\end{cases}$ *qui a pour solution (1/3 ;1/3 ;1/3)*