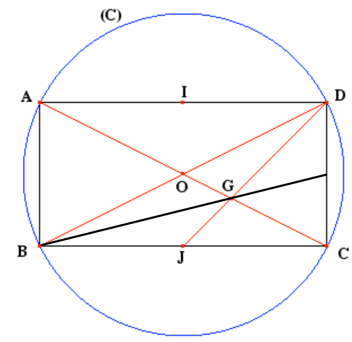
I. [6 Pts] Homothéties fastoches !!!



Soit ABCD un rectangle de centre O, I et J les milieux des côtés AD et BC, G l'intersection de JD et AC, h l'homothétie de centre G et de rapport –1/2.

1°) Démontrer que G est le centre de gravité du triangle BCD

En effet CO et DJ sont des médianes du triangle BCD.

2°) On veut construire les images de ABCD par l'homothétie $h_{[G\,;-1/2]}$

a. Démontrer que h(D) = J . *En effet* $\overrightarrow{GJ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GD}$

b. Démontrer que h(C) = 0 *De même* $\overrightarrow{GO} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GC}$

c. Déterminer l'image par h de la droite (DA).

Le point D ayant pour image J, la droite (DA) a pour image la parallèle à (DA) passant par J qui est (CB).

d. En déduire h(A).

***L'image de l'intersection A de (AB) et (AG) est l intersection des images** de ces deux droites, c'est à dire l'intersection de (DC) avec (GA) car dans une homothétie de centre G (AG) est transformée en ellec même. Donc* $\boxed{h(A) = C}$.

e. Déterminer l'image par h de la droite (AB)

Le point A ayant pour image C, la droite(AB) a pour image la parallèle à (AB) passant par C, soit (CD),

f. En déduire la construction de l'image K de B par h.

D'après la réponse précédente, l'image de B est sur (CD). D'autre part l'image de B est par définition de l'homothétie sur la droite (GB) donc l'image K de B est l'intersection de (CD) et (AB).

3°) Construire l'image (C') du cercle (C) par $h_{[G\,;-1/2]}$. Justifier la construction.

L'image (C') du cercle (C) circonscrit au rectangle (ABCD) est le cercle circonscrit au rectangle (JOKC) image de (BCDA). Le centre de (C') est l'imageO' de O par l'homothétie h, tel que $\overrightarrow{GO'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GO}$.

NB : O' est le milieu de[OC], car 0 étant l'intersection des diagonales [AC] et [BD] son image est l'intersection des images soit intersection de [OC] et de [JK] centre du rectangle (JOKC).

4°) Soit h' l'homothétie de centre C et de rapport +2.

Dans cette nouvelle homothétie on a h'(O) = A et h'(J) =B car $\overrightarrow{CA} = 2\overrightarrow{CO}$ *et* $\overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{CJ}$ *et h'(C) = C (centre).*

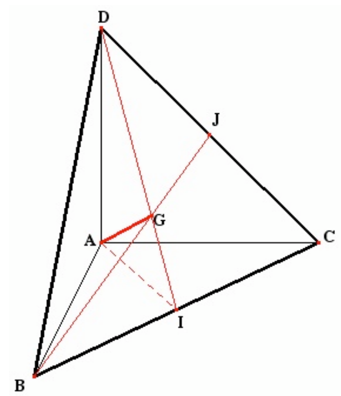
a. Construire l'image par $h'_{[C\,;2]}$ du cercle circonscrit au triangle JOC. Justifier.

Le centre du cercle circonscrit au triangle rectangle JOC est le milieu O' de l'hypothénuse [OC],et comme $\overrightarrow{CO} = 2\overrightarrow{CO'}$ *ce cercle a donc pour image le cercle de centre 0 circonscrit au triangle (ABC).*

b. Construire l'image par $h'_{[C\,;2]}$ du cercle de diamètre OJ. Justifier.

Le cercle de diamètre OJ a pour image le cercle de diamètre AB, car l'image d'un cercle est un cercle de diamètre égal au produit du diamètre initial par le rapport de l'homothétie. Or ici on a AB = 2 OJ donc AB est bien le diamètre.

II. [10 Pts] Tétra-èdre tri-rectangle



Soit ABCD un tétraèdre tel que ABC, ABD, et ACD soient des triangles rectangles isocèles en A avec AB = AC = AD = a. Soit G le centre de gravité du triangle BCD.

1°) **Étude géométrique** [Justifier toutes les réponses]

Rappels : Th.❶: *Si une droite est orthogonale à deux droites sécantes elle est orthogonale au plan de ces deux droites.*

Th.❷ *Si une droite est perpendiculaire à un plan alors elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan.*

a. Démontrer que le triangle BCD est équilatéral

En effet les triangles ABC, ABD, et ACD sont isométriques car rectangles en A avec des côtés adjaccents de même longueur. Les 3e côté sont donc tous de même longueur également : BC = CD = DB = a√2, donc BCD équilatéral.

b. Démontrer que (BC) est orthogonale à (AG).

Il y a plusieurs méthodes possibles, par exemple :

(i) *par* le théorème des 3 perpendiculaires (DA) ⊥ (ABC) et (AI) ⊥ (BC) entraîne (DI) ⊥ (BC), par suite =❶➔(BC) ⊥ (DAI) et donc =❷➔(BC) ⊥ (AG).

(ii) *Directement : dans le triangle isocèle BAC) la médiane AI est aussi hauteur donc (AI) ⊥ (BC), et dans le triangle équilatéral BCD la médiane DI est aussi hauteur donc (DI) ⊥ (BC),*
Donc en vertu du Th.❶ *on peut dire que* (BC) ⊥ (DAI) *d'où en vertu du* Th.❷ (BC) ⊥ (AG).

c. Montrer que (CD) est orthogonale à (AB)

En effet dans ce tétra-èdre tri-rectangle (BA) est perpendiculaire au plan (CAD) donc [Th.❷]*(AB) orthogonale à (CD).*

d. Montrer que (CD) est orthogonale à (BJ)

Trop facile !!! en effet le triangle (BCD) étant équilatéral la médiane (BJ) est également hauteur donc (CD) ⊥ (BJ).

e. En déduire que (CD) est orthogonale à (AG)

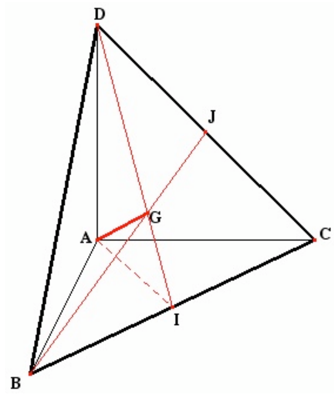
Fastoche !!! D'après (c) et (d) ci-dessus et Th.❶: on peut dire que (CD) ⊥ (ABJ) et donc Th.❷ (CD) ⊥ (AG).

f. En déduire que (AG) est perpendiculaire au plan (BCD).

Trivial !!! D'après (a) et (e) ci-dessus et Th.❶: on peut dire que (AG) ⊥ (BCD). C.Q.F.D. !

2°) **Étude Analytique** [Justifier toutes les réponses]

On considère le repère orthonormal $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)$



Dans ce repère on a les coordonnées suivantes :

A(0;0;0) , B(1;0;0) , C(0;1;0) , D(0;0;1) , I(1/2;1/2;0)

a. Démontrer que $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})$

G étant l'isobarycentre du triangle BCD on a $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{O}$ *donc en introduisant le point A on obtient par la relation de Chasles*

$$(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB})+(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AC})+(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AD})=\vec{O}\Leftrightarrow 3\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=\vec{O}\Leftrightarrow \overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})$$

b. En déduire les coordonnées de G

$$\overrightarrow{AG}=\tfrac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})=\tfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\tfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\tfrac{1}{3}\overrightarrow{AD}\Leftrightarrow G(\tfrac{1}{3};\tfrac{1}{3};\tfrac{1}{3})$$

c. Donner une équation cartésienne du plan (BDC).

Les pts B,C,D étant sur les axes de coordonnées l'équation est de la forme $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ *avec a=b=c=1 soit* $\boxed{x+y+z=1}$

d. Donner une équation cartésienne du plan (AID).

Le plan (AID) contenant l'axe des z, son équation se réduit à celle de sa trace dans le plan « horizontal » $\boxed{x=y.}$

e. Donner une équation cartésienne du plan (ABJ).

Le plan (AJB) contenant l'axe des x, son équation se réduit à celle de sa trace dans le plan « frontal» $\boxed{y=z.}$

f. Montrer que ces 3 plans ont un point commun et donner ses coordonnées.

M (x,y,z) commun aux trois plans ⇔ Système $\begin{cases}x+y+z=1\\x-y=0\\y-z=0\end{cases}$ *qui a pour solution unique : x = y = z =* $\frac{1}{3}$ *(point G)*

g. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix};\overrightarrow{ID}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix};\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix};$

h. $\overrightarrow{AG}\perp\overrightarrow{BC}\text{ et }\overrightarrow{AG}\perp\overrightarrow{ID}\Leftrightarrow\overrightarrow{AG}\circ\overrightarrow{BC}=(-1)\tfrac{1}{3}+(1)\tfrac{1}{3}+0\left(\tfrac{1}{3}\right)=0\text{ et }\overrightarrow{AG}\circ\overrightarrow{ID}=(-\tfrac{1}{2})(\tfrac{1}{3})+(-\tfrac{1}{2})(\tfrac{1}{3})+(1)(\tfrac{1}{3})=0$

i. En déduire que (AG) est perpendiculaire au plan (BCD).

(AG) ⊥ (CD) et (AG) ⊥ (CD) ==Th.❶⇒ AG) ⊥ (BCD).

j. Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite (AG).

$$M\in(AG)\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}=k.\overrightarrow{AG}\Leftrightarrow(S)\begin{cases}x=k\frac{1}{3}\\y=k\frac{1}{3}\\z=k\frac{1}{3}\end{cases}$$

k. En déduire la valeur de k pour que le point M défini par soit dans (BCD)

M ∈ (BCD)⇔ coordonnées de M vérifient l'équation du plan : $\frac{k}{3}+\frac{k}{3}+\frac{k}{3}=1\Leftrightarrow k=1$

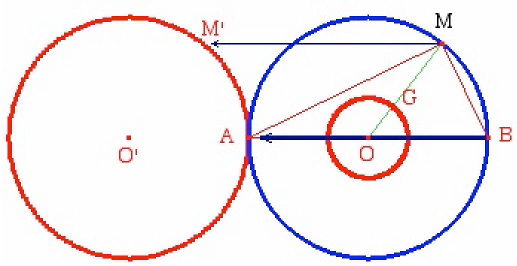
l. Indiquer les coordonnées du point K correspondant.

On remplace k par la valeur trouvée dans le système (S) d'où x = y = z = $\frac{1}{3}$*, c'est à dire que K = G.*

III. [4 Pts] Lieux Géométriques

Soient (C) un cercle de centre 0, deux points A et B, fixés, diamétralement opposés sur ce cercle, et M un point courant sur le cercle (C).

1°) On considère le 4e sommet M'du parallélogramme construit sur ABM.
Déterminer et construire le lieu géométrique du point M' lorsque M parcours le cercle (C).



Par définition du parallélogramme (ABMM') on a quelque soit M $\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{BA}$ *donc M' est l'image de M dans la translation de vecteur* $\overrightarrow{BA}$. *Donc le lieu de M' est le cercle (C') déduit de (C) par cette translation. (C') est donc le cercle tangent en A à extérieurement à (C) et de même rayon.*

2°) On considère le centre de gravité G du triangle ABM inscrit dans le cercle (C).
Déterminer et construire le lieu géométrique de G lorsque M parcours le cercle (C).

Par définition du centre de gravité G du triangle ABM, on a, quelque soit M, $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OM}$ *donc G est l'image de M dans l'homothétie de centre O et de rapport* $\frac{1}{3}$ *donc le lieu de G est le cercle homothétique du cercle (C) dans cette homothétie. C'est donc le cercle de centre O et de rayon* $R=\frac{1}{3}OA$. *(l'image de O est O car c'est aussi le centre de l'homothétie)*