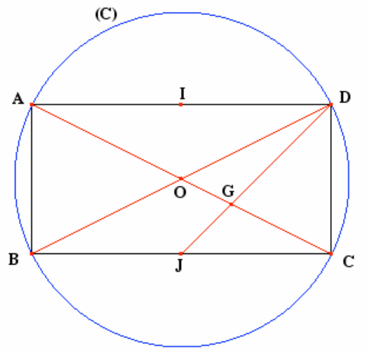
Géométrie de l'espace • Translations • Homothéties

I. [6 Pts] <u>Homothéties fastoches !!!</u>

Soit ABCD un rectangle de centre O, I et J les milieux des côtés AD et BC, G l'intersection de JD et AC, h l'homothétie de centre G et de rapport –1/2



1°) Démontrer que G est le centre de gravité du triangle BCD

2°) On veut construire les images de ABCD par l'homothétie $h_{[G\,;-1/2]}$

- *a. Démontrer que h(D) = J*
- *b. Démontrer que h(C) = 0*
- *c. Déterminer l'image par h de la droite (DA).*
- *d. En déduire h(A).*
- *e. Déterminer l'image par h de la droite (AB)*
- *f. En déduire la construction de l'image K de B par h.*

3°) Construire l'image (C') du cercle (C) par $h_{[G\,;-1/2]}$. Justifier la construction.

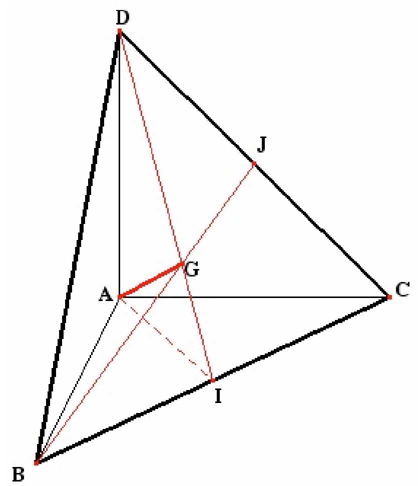
4°) Soit h' l'homothétie de centre C et de rapport +2.

- *a. Construire l'image par $h'_{[C\,;2]}$ du cercle circonscrit au triangle JOC. Justifier.*
- *b. Construire l'image par $h'_{[C\,;2]}$ du cercle de diamètre OJ. Justifier.*

II. [10 Pts] <u>Tétraèdre tri-rectangle</u>

Soit ABCD un tétraèdre tel que ABC, ABD, et ACD soient des triangles rectangles isocèles en A avec AB = AC = AD = a. Soit G le centre de gravité du triangle BCD.

1°) Étude géométrique *[Justifier toutes les réponses]*



- *a. Démontrer que le triangle BCD est équilatéral*
- *b. Démontrer que (BC) est orthogonale à (AG).*
- *c. Montrer que (CD) est orthogonale à (AB)*
- *d. Montrer que (CD) est orthogonale à (BJ)*
- *e. En déduire que (CD) est orthogonale à (AG)*
- *f. En déduire que (AG) est perpendiculaire au plan (BCD).*

2°) Étude Analytique *[Justifier toutes les réponses]*

On considère le repère orthonormal $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)$

- *a. Démontrer que* $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})$
- *b. En déduire les coordonnées de G*
- *c. Donner une équation cartésienne du plan (BDC).*
- *d. Donner une équation cartésienne du plan (AID).*
- *e. Donner une équation cartésienne du plan (ABJ).*
- *f. Montrer que ces 3 plans ont un point commun et donner ses coordonnées.*
- *g. Calculer les coordonnées des vecteurs* $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{ID}$, $\overrightarrow{AG}$
- *h. Montrer que* $\overrightarrow{AG}\perp\overrightarrow{BC}$ *et* $\overrightarrow{AG}\perp\overrightarrow{ID}$
- *i. En déduire que (AG) est perpendiculaire au plan (BCD).*
- *j. Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite (AG).*
- *k. En déduire la valeur de k pour que le point M défini par* $\overrightarrow{AM}=k\,\overrightarrow{AG}$ *soit dans (BCD)*
- *l. Indiquer les coordonnées du point K correspondant.*

III. [4 Pts] <u>Lieux Géométriques</u>

Soient (C) un cercle de centre 0, deux points A et B, fixés, diamétralement opposés sur ce cercle, et M un point courant sur le cercle (C).

1°) On considère le 4^{e} sommet M'du parallélogramme construit sur ABM.
Déterminer et construire le lieu géométrique du point M' lorsque M parcours le cercle (C).

2°) On considère le centre de gravité G du triangle ABM inscrit dans le cercle (C).
Déterminer et construire le lieu géométrique de G lorsque M parcours le cercle (C).