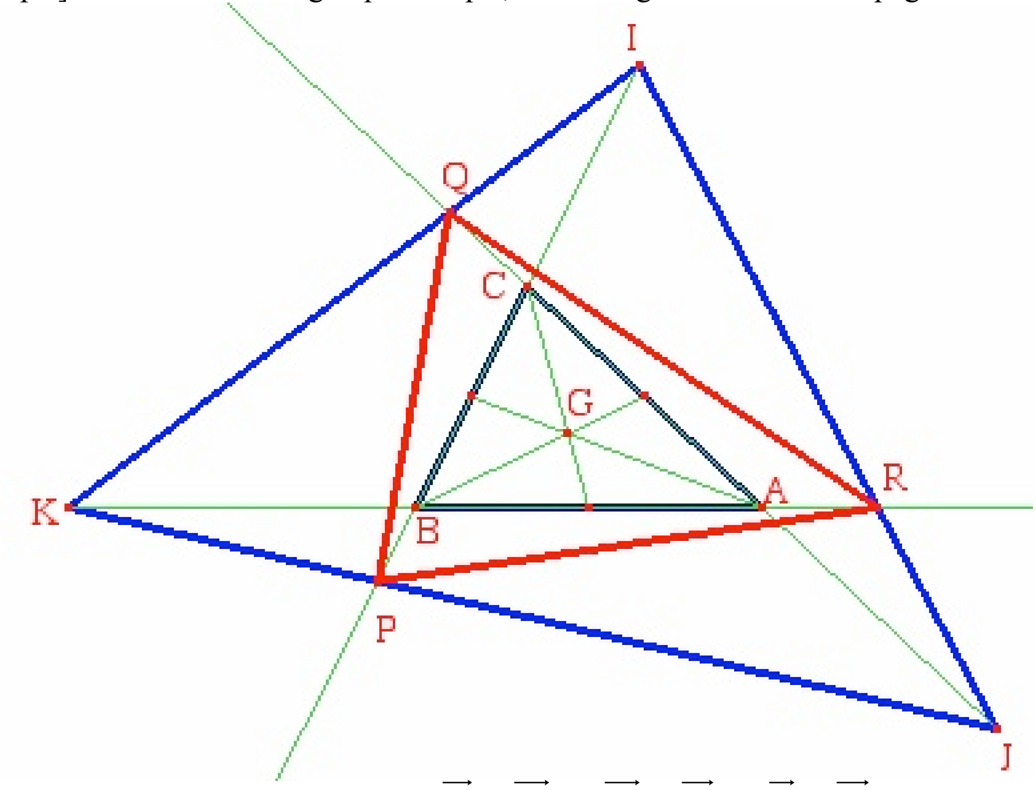
Barycentres • Alignements • Produit Scalaire • Lieux Géométriques

I- [10 pts] Soit ABC un triangle quelconque, faire la figure sur une demi page.



1°) Construire les pts I, J, K tels que : $\overrightarrow{AJ} = -\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{BK} = -\overrightarrow{BA}$; $\overrightarrow{CI} = -\overrightarrow{CB}$: voir figure

2°) Exprimer A, B, C comme isobarycentres, et montrer que $A = Bar\begin{pmatrix} J & C \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$

A milieu de [JC] ; B milieu de [KA] ; C milieu de [IB] ; $A = \begin{pmatrix} J & C \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J & C \\ 4 & 4 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} K & A \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} I & B \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

3°) En déduire que A est barycentre de $\begin{pmatrix} J & I & K & A \\ 4 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ puis que A=Bar.$\begin{pmatrix} I & J & K \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

En effet en vertu de l'associativité on peut écrire $A = Bar\begin{pmatrix} J & C \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = Bar\begin{pmatrix} J & I & B \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} = Bar\begin{pmatrix} J & I & K & A \\ 4 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Cette dernière relation se traduit par l'égalité vectorielle :

$$4\overrightarrow{AJ} + 2\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{AA} = \vec{0} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{AJ} + 2\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AK} = \vec{0} \Leftrightarrow A = Bar\begin{pmatrix} I & J & K \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

4°) Exprimer <u>de même</u> (sans démonstration) chacun des points B et C comme barycentres des points I,J,K affectés de coefficients convenablement choisis.
(indiquer les systèmes correspondants à B et C respectivement)
Par « permutation circulaire » sur les points $A \to B \to C \to A$ et $I \to J \to K \to I$ on obtient :

$$A = bar\begin{pmatrix} I & J & K \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \to B = bar\begin{pmatrix} J & K & I \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \to C = bar\begin{pmatrix} K & I & J \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

5°) Placer sur la figure les points P, Q, R tels que $\overrightarrow{KP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{KJ}$; $\overrightarrow{IQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IK}$; $\overrightarrow{JR} = \frac{1}{3}\overrightarrow{JI}$

voir figure

6°) Montrer que d'après ce qui précède : $P = \left(\begin{array}{c|c} K & J \\ 2 & 1 \end{array}\right)$ *et* $B = \left(\begin{array}{c|c} I & P \\ 1 & 6 \end{array}\right)$

Par construction de K

$$3\overrightarrow{KP} - \overrightarrow{KJ} = \vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{KP} - \overrightarrow{KP} - \overrightarrow{PJ} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{PK} + \overrightarrow{PJ} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} P \\ 3 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} K & J \\ 2 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} P \\ 6 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} K & J \\ 4 & 2 \end{array}\right)$$

Et donc d'après 4°) $B = bar\left(\begin{array}{c|c|c} J & K & I \\ 2 & 4 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} P & I \\ 6 & 1 \end{array}\right)$ *C.Q.F.D.*

7°) En déduire que P est l'intersection des droites (BC) et (KJ)

D'après ce qui précède P ∈ (KJ) et B ∈ (PI) donc P ∈ (BI) =(BC) donc {P} = (KJ) ∩ (BC) CQFD

8°) Montrer de même que R est l'intersection des droites (AB) et (JI) et que le point Q est l'intersection des droites (AC) et (KI).

Par « permutation circulaire » sur les points A→B→C→A ; I→J→K→I ; P→Q→R→P on obtient :

$$P = \left(\begin{array}{c|c} K & J \\ 2 & 1 \end{array}\right) \text{ et } B = \left(\begin{array}{c|c} I & P \\ 1 & 6 \end{array}\right) \to Q = \left(\begin{array}{c|c} I & K \\ 2 & 1 \end{array}\right) \text{ et } C = \left(\begin{array}{c|c} J & Q \\ 1 & 6 \end{array}\right) \to R = \left(\begin{array}{c|c} J & I \\ 2 & 1 \end{array}\right) \text{ et } A = \left(\begin{array}{c|c} K & R \\ 1 & 6 \end{array}\right)$$

D'où Q ∈ (IK) et C ∈ (JQ) donc Q ∈ (CJ) =(CA)

donc {Q} = (IK) ∩ (CA) CQFD

De même R ∈ (JI) et A ∈ (KR) donc R ∈ (AK) =(AB)

donc {R} = (JI) ∩ (AB) CQFD

9°) Démontrer que les centres de gravité des triangles ABC, IJK sont confondus.

Soit G l'isobarycentre des points A,B,C, alors on a peut écrire (par homogénéïté et associativité des barycentres) en utilisant le 3° et 4°

$$G = \left(\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ 7 & 7 & 7 \end{array}\right) = \left(\left(\begin{array}{c|c|c} I & J & K \\ 2 & 4 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c|c} J & K & I \\ 2 & 4 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c|c} K & I & J \\ 2 & 4 & 1 \end{array}\right)\right) = \left(\begin{array}{c|c|c} I & J & K \\ 7 & 7 & 7 \end{array}\right) = Isobar(I,J,K)$$

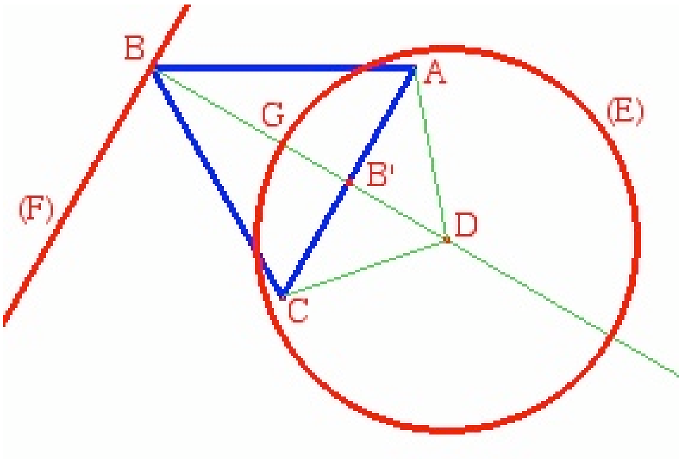
10°) Tracer le triangle PQR et montrer qu'il a le même centre de gravité que ABC

Soit G' l'isobarycentre des pointsP,Q,R, alors on a peut écrire (par homogénéïté et associativité des barycentres) en utilisant le 6°)

$$G' = \left(\begin{array}{c|c|c} P & Q & R \\ 3 & 3 & 3 \end{array}\right) = \left(\left(\begin{array}{c|c} K & J \\ 2 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} I & K \\ 2 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} J & I \\ 2 & 1 \end{array}\right)\right) = \left(\begin{array}{c|c|c} I & J & K \\ 3 & 3 & 3 \end{array}\right) = G$$

Ainsi les triangles PQR et ABC ayant même isobarycentre que IJK, les centres de gravité des 3 triangles sont bien confondus.

II - [10 pts] Soit ABC un triangle <u>équilatéral</u> de côté a = 3 unités de longueur , B' le milieu de côté AC et D le barycentre du système $\left(\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ 3 & -2 & 3 \end{array}\right)$. On rappelle que la hauteur d'un triangle équilatéral a pour mesure $a\frac{\sqrt{3}}{2}$ avec a = 3.



1°) Montrer que D appartient à la médiatrice du segment [AC] et que $\overrightarrow{BD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BB'}$

Par hypothèse on a $\left(\begin{array}{c|c} A & C \\ 1 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} A & C \\ 3 & 3 \end{array}\right) = \frac{B'}{6}$ *et par associativité du Barycentr* $D = \left(\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ 3 & -2 & 3 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} B' & B \\ 6 & -2 \end{array}\right)$

Donc D appartient à la droite (BB') qui est médiatrice de AC dans le triangle équilatéral ABC. On en déduit les relations vectorielles

$6.\overrightarrow{DB'} - 2.\overrightarrow{DB} = \vec{0} \iff 6.\overrightarrow{DB} + 6.\overrightarrow{BB'} - 2.\overrightarrow{DB} = \vec{0} \iff 4.\overrightarrow{BD} = 6.\overrightarrow{BB'} \iff \overrightarrow{BD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BB'}$ *(C.Q.F.D.)*

2°) Placer D sur la figure. Calculer DA^2 et DB^2 *(Théorème de Pythagore !)*

$DA^2 = DB'^2 + B'A^2 = \left(\frac{1}{2}.\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{63}{16}$ et $DB^2 = (DB' + B'B)^2 = \left(\frac{1}{2}.\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{243}{16}$

[A] On veut déterminer le lieu géométrique (E) des points M du plan vérifiant la relation :

$$3\,MA^2 - 2\,MB^2 + 3\,MC^2 = 12 \quad (1)$$

a) Montrer que $3.\overrightarrow{MA}^2 - 2.\overrightarrow{MB}^2 + 3.\overrightarrow{MC}^2 = 4.\overrightarrow{MD}^2 + 3.\overrightarrow{DA}^2 - 2.\overrightarrow{DB}^2 + 3.\overrightarrow{DC}^2$

Dans la relation (1) on peut remplacer les carrés des distances par les carrés scalaires des vecteurs, puis appliquer la relation de Chasles en introduisant le barycentre D du système {(A,3) ;(B,-2) ;(C,3)} $3.\overrightarrow{MA}^2 - 2.\overrightarrow{MB}^2 + 3.\overrightarrow{MC}^2 = 3(\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DA})^2 - 2(\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DB})^2 + 3(\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC})^2$

$= 4.\overrightarrow{MD}^2 + 3.\overrightarrow{DA}^2 - 2.\overrightarrow{DB}^2 + 3.\overrightarrow{DC}^2 + 2\overrightarrow{MD} \circ (3\overrightarrow{DA} - 2\overrightarrow{DB} + 3\overrightarrow{DC})$

or par hypotyèse on a $3\overrightarrow{DA} - 2\overrightarrow{DB} + 3\overrightarrow{DC} = \vec{0}$ *d'où l'égalité demandée.*

b) En déduire MD^2. :*On a* $4.\overrightarrow{MD}^2 + 3.\overrightarrow{DA}^2 - 2.\overrightarrow{DB}^2 + 3.\overrightarrow{DC}^2 = 12$ *d'où* $4.MD^2 = 12 - 6.DA^2 + 2.DB^2$

(car DC = DA) et par suite en utilisant les valeurs trouvées en 2°) : $MD^2 = \frac{75}{16}$

c) Conclusion : quel est le lieu géométrique des points M tels que (1) ?

Rép : DM $= \frac{5\sqrt{3}}{4}$ *donc M appartient au cercle de centre D et de rayon* $\frac{5\sqrt{3}}{4}$

d) Vérifier par le calcul que le centre de gravité G du triangle ABC appartient à (E). Tracer (E).

Vérifions que 3 GA^2 - 2 GB^2 + 3 GC^2 = 12. En effet G étant le centre de gravité du triangle équilatéral ABC, il est aussi le centre du cercle circonscrit à ABC et donc

GA=GB=GC=$\frac{2}{3}BB' = \frac{2}{3}.\frac{3\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ *et on a donc 4GA^2 = 4 x3 = 12 (C.Q.F.D.)*

l'ensemble (E) est donc le cercle de centre D passant par G. (voir figure).

On peut aussi vérifier aisément que DG = $\frac{5\sqrt{3}}{4}$.

[B] On veut déterminer l'ensemble (F) des points du plan tels que :

$$MA^2 - 2\,MB^2 + MC^2 = 18 \qquad (2)$$

a) Vérifier que le point B appartient à (F)

On a en effet $BA^2 - 2BB^2 + BC^2 = 2BA^2 = 2(3)^2 = 18$

b) Montrer que $\overrightarrow{MA}^2 - 2\overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MC}^2 = 2.\overrightarrow{MA} \circ (\overrightarrow{AC} - 2.\overrightarrow{AB}) - \overrightarrow{AB}^2$

Dans la relation (2) on peut remplacer les carrés des distances par les carrés scalaires des vecteurs, puis appliquer la relation de Chasles en introduisant le point A , car le système {(A,1) ;(B,-2) ;(C,1)} n'a pas de barycentre (somme des coefficients nulle) :

$$\overrightarrow{MA}^2 - 2\overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MC}^2 = \overrightarrow{MA}^2 - 2(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB})^2 + (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC})^2 = 2\overrightarrow{MA} \circ (\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AB}) - 2\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2$$

Et comme AB = AC on obtient bien la relation demandée.

c) En déduire que la relation (2) équivaut à la relation $\overrightarrow{MA} \circ \overrightarrow{BB'} = \dfrac{27}{4}$ (3)

On a $\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AB} = \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA}\right) + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} = 2\overrightarrow{BB'}$ *d'où* $2.\overrightarrow{MA} \circ 2\overrightarrow{BB'} - \overrightarrow{AB}^2 = 18$

Finalement on a bien $4.\overrightarrow{MA} \circ \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{AB}^2 + 18 = 9 + 18 = 27$ *soit* $\overrightarrow{MA} \circ \overrightarrow{BB'} = \dfrac{27}{4}$

d) En déduire que $\overrightarrow{B'M} \circ \overrightarrow{B'B} = \dfrac{27}{4}$ puis que $\overrightarrow{B'H} \circ \overrightarrow{B'B} = \dfrac{27}{4}$ (H étant la projection orthogonale de M sur B'B)

En utilisant la relation de Chasles on obtient

$$\left(\overrightarrow{MB'} + \overrightarrow{B'A}\right) \circ \overrightarrow{BB'} = \frac{27}{4} \Leftrightarrow \overrightarrow{MB'} \circ \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{B'A} \circ \overrightarrow{BB'} = \frac{27}{4}$$

Mais comme $\overrightarrow{B'A} \perp \overrightarrow{B'B}$ *donc* $\overrightarrow{B'A} \circ \overrightarrow{B'B} = 0$ *par suite* $\overrightarrow{MB'} \circ \overrightarrow{BB'} = \dfrac{27}{4} \Leftrightarrow \overrightarrow{B'M} \circ \overrightarrow{B'B} = \dfrac{27}{4}$

Par suite en utilisant le théorème fondamental de conservation du Produit scalaire par projection orthogonale de l'un des vecteurs sur l'autre on obtient en effet $\overrightarrow{B'H} \circ \overrightarrow{B'B} = \dfrac{27}{4}$

e) En déduire la nature de l'ensemble (F), et le tracer sur la figure.

De la relation $\overrightarrow{B'H} \circ \overrightarrow{B'B} = \dfrac{27}{4}$ *on déduit* $\overline{B'H} \times \left\|\overrightarrow{B'B}\right\| = \dfrac{27}{4} \Leftrightarrow \overline{B'H} = \dfrac{27}{4 \times \left\|\overrightarrow{B'B}\right\|} = \dfrac{27}{4\,\dfrac{3\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Par suite on a $\overline{B'H} = \overline{B'B} \Leftrightarrow H = B$ *ce qui signifie que l'ensemble (F) est la droite perpendiculaire à (BB') passant par B. (voir figure).*