Barycentres • Alignements • Produit Scalaire • Lieux Géométriques

- I- [10 pts] Soit ABC un triangle quelconque, faire la figure sur une demi page.
- 1°) Construire les pts I, J, K tels que : $\vec{AJ} = -\vec{AC}$; $\vec{BK} = -\vec{BA}$; $\vec{CI} = -\vec{CB}$
 - 2°) Exprimer A, B, C comme isobarycentres, et montrer que $A = \text{Bar.} \left(\begin{array}{c|c} J & C \\ \hline 4 & 4 \end{array} \right)$
 - 3°) En déduire que A est barycentre de $\left(\begin{array}{c|c|c|c} J & I & K & A \\ \hline 4 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right)$ puis que $A = \text{Bar.} \left(\begin{array}{c|c|c} I & J & K \\ \hline 2 & 4 & 1 \end{array} \right)$
 - 4°) Exprimer de même (sans démonstration) chacun des points B et C comme barycentres des points I, J, K affectés de coefficients convenablement choisis. (*indiquer les systèmes correspondants à B et C respectivement*)
 - 5°) Placer sur la figure les points P, Q, R tels que $\vec{KP} = \frac{1}{3}\vec{KJ}$; $\vec{IQ} = \frac{1}{3}\vec{IK}$; $\vec{JR} = \frac{1}{3}\vec{JI}$
 - 6°) Montrer que d'après ce qui précède : $P = \left(\begin{array}{c|c} K & J \\ \hline 2 & 1 \end{array} \right)$ et $B = \left(\begin{array}{c|c} I & P \\ \hline 1 & 6 \end{array} \right)$
 - 7°) En déduire que P est l'intersection des droites (BC) et (KJ),
 - 8°) Montrer de même que R est l'intersection des droites (AB) et (JI) et que le point Q est l'intersection des droites (AC) et (KI).
 - 9°) Démontrer que les centres de gravité des triangles ABC, IJK sont confondus.
 - 10°) Tracer le triangle PQR et montrer qu'il a le même centre de gravité que ABC.

- II - [10 pts] Soit ABC un triangle équilatéral de côté $a = 3$ unités de longueur, B' le milieu de côté AC et D le barycentre du système $\left(\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline 3 & -2 & 3 \end{array} \right)$. On rappelle que la hauteur d'un triangle équilatéral a pour mesure $a \frac{\sqrt{3}}{2}$ avec a = longueur du côté (a = 3).

- 1°) Montrer que D appartient à la médiatrice du segment [AC] et que $\vec{BD} = \frac{3}{2}\vec{BB'}$.
- 2°) Placer D sur la figure. Calculer DA^2 et DB^2 (*Théorème de Pythagore !*)

- [A] On veut déterminer le lieu géométrique (E) des points M du plan vérifiant la relation :

$$3 MA^2 - 2 MB^2 + 3 MC^2 = 12 \quad (1)$$

a) Montrer que $3\vec{MA}^2 - 2\vec{MB}^2 + 3\vec{MC}^2 = 4\vec{MD}^2 + 3\vec{DA}^2 - 2\vec{DB}^2 + 3\vec{DC}^2$

b) En déduire MD^2 .

c) Conclusion : quel est le lieu géométrique des points M tels que (1)

d) Vérifier par le calcul que le centre de gravité G du triangle ABC appartient à (E).
Tracer (E).

- [B] On veut déterminer l'ensemble (F) des points du plan tels que :

$$MA^2 - 2 MB^2 + MC^2 = 18 \quad (2)$$

a) Vérifier que le point B appartient à (F)

b) Montrer que $\vec{MA}^2 - 2\vec{MB}^2 + \vec{MC}^2 = 2\vec{MA} \circ (\vec{AC} - 2\vec{AB}) - \vec{AB}^2$

c) En déduire que la relation (2) équivaut à la relation $\vec{MA} \circ \vec{BB'} = \frac{27}{4}$ (3)

d) En déduire que $\vec{B'M} \circ \vec{B'B} = \frac{27}{4}$ puis que $\vec{B'H} \circ \vec{B'B} = \frac{27}{4}$ (H étant la projection orthogonale de M sur B'B)

e) En déduire la nature de l'ensemble (F), et le tracer sur la figure.