jml@ecole-alsacienne.org

• Fonctions et Suites Numériques •

I- [10 pts] Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x^2}{2x-1}$

et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormal. (unités = 2 carreaux)

A - 1°) Montrer que l'on peut écrire f sous la forme $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{2x-1}$

2°) Calculer la dérivée de f, montrer que f est croissante sur [1; +∞ [et dresser le tableau complet des variations, des limites et des extrema.

3°) Montrer que la courbe (C_f) admet pour asymptote oblique la droite (Δ) d'équation $y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{4}$*, et préciser la position de (C_f) par rapport à (Δ).*

4°) Déterminer les points fixes de f, c'est-à-dire les points tels que f(x) = x.

5°) Tracer la courbe (C_f) et ses asymptotes sur l'intervalle] -∞ ; +∞ [

B - On définit la suite (u_n) par récurrence à l'aide de la fonction f : $u_{n+1} = f(u_n)$ *et* $u_0 = 2$.

1°) Faire une nouvelle figure de la la courbe (C_f) *sur l'intervalle [0; +∞[en prenant 4 carreaux pour unité.*

2°) Représenter graphiquement les premiers termes de (u_n) sur l'axe (Ox).

3°) Indiquer si d'après le graphique obtenu la suite (u_n) est monotone ? bornée ? convergente ?

4°) Montrer par récurrence que pour tout n ≥ 0, on a : $1 \le u_n \le 2$.

5°) Montrer par récurrence que (u_n) est décroissante.

6°) Montrer que d'après 5°), pour tout n ≥ 0, on a la relation : $|u_n - 1| \le \left|u_n - \dfrac{1}{2}\right|$ *d'où* $\left|\dfrac{u_n - 1}{2u_n - 1}\right| \le \dfrac{1}{2}$

7°) En déduire que, pour tout n ≥ 0, on a la relation : $|u_{n+1} - 1| \le \dfrac{1}{2}|u_n - 1|$

8°) En déduire par récurrence que, pour tout n ≥ 0, on a $|u_n - 1| \le \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

9°) En déduire la limite de (u_n).

II- [7 pts] On considère la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = -\dfrac{1}{2}u_n + 6$ *et* $u_0 = 1$.

1°) Construire géométriquement les premiers termes de cette suite dans un repère orthonormal (unités = 2 carreaux) à l'aide de la droite d'équation $y = f(x) = -\dfrac{1}{2}x + 6$ *et de la première bissectrice.*

2°) Indiquer si d'après le graphique obtenu la suite (u_n) est monotone ? bornée ? convergente ?

3°) Calculer u_1 ; u_2 ; u_3 ; u_4

4°) Démontrer par récurrence que pour tout n ≥ 0, on a : $1 \le u_n \le 6$.

5°) On pose $v_n = u_n - 4$

i. Montrer que la suite (v_n) est géométrique. Indiquer sa raison q et son premier terme v_0

ii. En déduire l'expression de v_n en fonction de n puis celle de u_n en fonction de n

iii. En déduire la limite de v_n puis celle de u_n

III- [3 pts] Achille court après la tortue autour de la ville de Troie. Achille court 10 fois plus vite que la tortue et dans le même sens que celle-ci. Au départ la distance qui les sépare est d_0 = 100 m. Chaque fois qu'Achille parcourt la distance qui le sépare de la tortue, celle-ci continue à courir, étape par étape. On appelle d_n la distance qui sépare Achille et la tortue au bout de la $n^{ième}$ étape.

1°) Calculer d_1, d_2, d_3, d_4.

2°) Montrer que la suite (d_n) est géométrique, indiquer son premier terme et sa raison.

3°) En déduire la distance que devra parcourir Achille pour rattraper la tortue.