Nom /prénom JML	Note :20 / 20

• Suites numériques et démonstrations par récurrence •

I- [4 pts]1°) Démontrer par récurrence la proposition suivante :

$$P(n) :\ S_n = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

<u>INITialisation</u> :P(0) est VRAIE car $S_0 = 1 = \dfrac{1-q^{0+1}}{1-q}$

<u>HéRéDiTé</u> :Soit n fixé : montrons que P(n) ⇒ P(n+1)

En effet

$$S_{n+1} = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n + q^{n+1} = S_n + q^{n+1} = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + q^{n+1}$$

$$= \frac{1-q^{n+1} + q^{n+1}(1-q)}{1-q} = \frac{1-q^{n+2}}{1-q}$$

C.Q.F.D.

<u>CONClusion</u> : P(n) étant Héréditaire et Initialement vraie on peut affirmer- en vertu du principe d'induction - que P(n) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

<u>Remarque</u> : démo directe : $(1-q)(1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n) = 1 - q^{n+1}$

2°)[3 pts] On prend $q = \dfrac{1}{2}$ *Calculer* S_1, S_2, S_3

$S_1 = 1 + q = 1 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$ $\quad S_2 = 1 + q + q^2 = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{7}{4}$ $\quad S_3 = 1 + q + q^2 + q^3 = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} = \dfrac{7}{4} + \dfrac{1}{8} = \dfrac{15}{8}$

3°)[2 pts] Exprimer S_n *en fonction de n avec* $q = \dfrac{1}{2}$

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n} = \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = 2\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) = 2 - \frac{1}{2^n}$$

4°)[1 pt] Quelle est la limite de S_n. ?

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}\left(2 - \frac{1}{2^n}\right) = 2 - 0 = 2^-$$

II - Soit (u_n) *est une suite numérique définie par les relations* $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 1$ *et* $u_0 = 0$

1°) [3 pts]Calculer u_1, u_2, u_3

$$u_1 = \frac{1}{2}u_0 + 1 = 0 + 1 = 1 \quad u_2 = \frac{1}{2}u_1 + 1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2} \quad u_3 = \frac{1}{2}u_2 + 1 = u_2 = \frac{1}{2}.\frac{3}{2} + 1 = \frac{7}{4}$$

2°)[5 pts] Démontrer par récurrence que pour tout n , on a P(n) : $u_n = 2 - \dfrac{1}{2^{n-1}}$

<u>INITialisation</u> :P(0) est VRAIE car $u_0 = 2 - \dfrac{1}{2^{0-1}} = 2 - 2 = 0$

<u>HéRéDiTé</u> :Soit n fixé : montrons que P(n) ⇒ P(n+1)

$u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 1$ *et par hypothèse* $u_n = 2 - \dfrac{1}{2^{n-1}}$ *donc* $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(2 - \dfrac{1}{2^{n-1}}\right) + 1 = 1 - \dfrac{1}{2^n} + 1 = 2 - \dfrac{1}{2^n}$ *C.Q.F.D.*

3°)[2 pts] Quelle est la limite de u_n ?

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}\left(2 - \frac{1}{2^n}\right) = 2 - 0 = 2^-$$