• Fonctions Rationnelles •

Dérivées • Variations • Courbes • Asymptotes • Tangentes • Symétries

I – [5 pts] Soit f la fonction définie par $f(x)=\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{4}x^2-3x-\frac{37}{12}$

1. *Montrer que f(x) peut se factoriser par (x+1) et déterminer tous les zéros de ce polynôme.*
2. *Calculer la fonction dérivée f '(x) et déterminer son signe.*
3. *Dresser le tableau des variations de f en indiquant les limites et tous les résultats précédents (maximum, minimum, intersections avec les axes) .*
4. *Tracer la courbe (C') représentative de la fonction f ' dérivée de f dans un repère orthonormal (unités 2c).*
5. *Tracer la courbe(C) représentative de la fonction f dans le même repère que précédemment, et la tangente à (C) au point d'abscisse –1.*
6. *Montrer que la courbe de f admet pour centre de symétrie le point* $I(-\frac{1}{2};-\frac{37}{24})$.
7. *Écrire l'équation de la tangente (T) à (C) au point I. Que peut on dire de la position relative de (T) et de (C) ?*
8. *Quelles observations peut-on faire en comparant les positions relatives des courbes (C) et (C') ?*

II- [7 pts] Soit f la fonction définie par $f(x)=\frac{x^2+x+14}{2(x-1)}$ *et* (C_f) *la courbe représentative.*

1°) *Indiquer l'ensemble de définition* D_f *sous forme d'intervalles.*
2°) *Mettre f(x) sous la forme* $ax+b+\frac{c}{2x-2}$, *(déterminer a, b, c).*
3°) *Calculer les limites de f aux bornes de* D_f.
4°) *Montrer que* (C_f) *admet pour asymptote oblique la droite (Δ) d'équation* $y=\frac{1}{2}x+1$
5°) *Étudier la position de* (C_f) *par rapport à (Δ).*
6°) *Calculer la dérivée de f , factoriser f '(x) et étudier son signe.*
7°) *En déduire le tableau des variations de f, avec les limites et les valeurs des extrema de f(x).*
8°) *Déterminer une équation de la tangente* (T_0) *à (Cf) au point d'abscisse 0.*
9°) *Tracer les asymptotes et la courbe (Cf) avec soin dans un repère orthonormal (Unité 1c.), les points d'intersection avec les axes et la tangente* (T_0).
10°) *Calculer les coordonnées du point I intersection des deux asymptotes et démontrer que (Cf) admet I pour centre de symétrie.*

III - [8 pts] Soit f la fonction définie par $f(x)=\frac{x^3-2x}{x^2-4}$ *et (Cf) la courbe représentative.*

1°) *Indiquer l'ensemble de définition* D_f *sous forme d'intervalles.*
2°) *Mettre f(x) sous la forme* $ax+b+\frac{cx+d}{x^2-4}$, *(déterminer a, b, c, d).*
3°) *Calculer les limites de f aux bornes de* D_f*.et indiquer les asymptotes éventuelles.*
4°) *a) En déduire que (Cf) admet pour asymptote oblique la droite (Δ) d'équation y=x*
b) Étudier la position de (Cf) par rapport à (Δ).
5°) *Déterminer les intersections de (Cf) avec les axes de coordonnées.*
6°) *Calculer la dérivée de f '(x) et montrer que* $Sgn[f'(x)] = Sgn[P(x^2)]$ *avec* $P(X)= X^2-10X + 8$
7°) *Résoudre l'équation P(X)= 0 et en déduire que l'équation f '(x)=0 admet 4 racines distinctes.*
8°) *Dresser le tableau des variations de f, avec les limites et les valeurs des extrema de f(x).*
9°) *Tracer les asymptotes et la courbe (Cf) avec soin dans un repère orthonormal (Unité 1c.), en plaçant les points d'intersection avec les axes.*
10°) *La courbe (Cf) admet-elle un axe ou un centre de symétrie ? Justifier la réponse.*