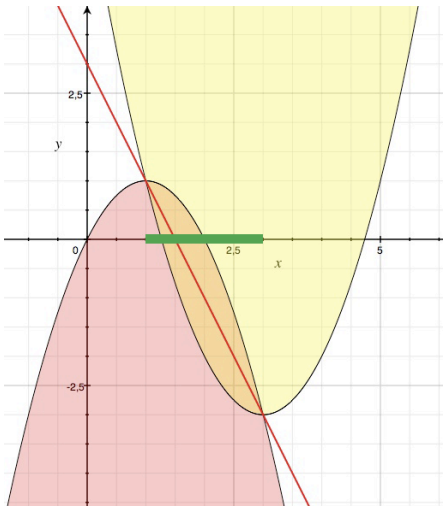
jml@ecole-alsacienne.org
2007-2008

Fonctions et équations paramétriques du Second Degré

I –1°) Construction des paraboles :
Lire sur la figure les coordonnées des sommets et des points d'intersection avec les axes.

(P_1) $\quad y = f_1(x) = -x^2 + 2x$

(P_2) $\quad y = f_2(x) = x^2 - 6x + 6$



2°) Équation aux abscisses des pts d'intersection :
$x^2 + 2x = x^2 - 6x + 6 \Leftrightarrow 2x^2 - 8x + 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$
solution évidente (a+b+c=0) : x' =1, autre sol : x'' = c / a =3
Points d'intersection :I(1 ;1) et J(3 ;-3).

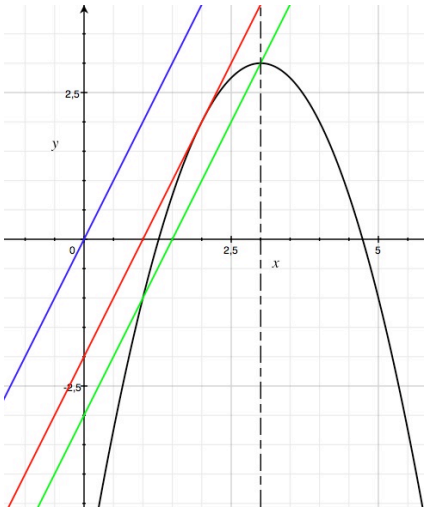
3°) Équation de la droite *(IJ)* *: coeff. dir.* $a = \dfrac{y_J - y_I}{x_J - x_I} = \dfrac{-3-1}{3-1} = -2$
d'où l'équation $y = -2x + b$ *et pour x=1 on a y=1=-2(1) + b*
d'où b = 3 d'où l'équation demandée : y =-2x + 3 .

4°) Inéquation $-x^2 + 2x \geq x^2 - 6x + 6 \Leftrightarrow 2x^2 - 8x + 6 \leq 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 \leq 0$
D'après les solutions trouvées en 2°) et le théorème du signe du trinôme, cette inéquation a pour solution l'intervalle [1 ; 3] surligné en vert sur l'axe Ox..

5°) Solution graphique du système $\begin{cases} y \leq -x^2 + 2x \\ y \geq x^2 - 6x + 6 \end{cases}$ *C'est l'ensemble des points de coordonnées (x,y) du plan situés à la fois sur et « en dessous » de* (P_1) *et sur et « au dessus » de* (P_2) *en orange sur la figure.*

6°) Transformations :
a) $g(x) = -f_1(x) = x^2 - 2x$; $h(x) = g(x-2) - 2 = (x-2)^2 - 2(x-2) = x^2 - 6x + 6 = f_2(x)$. *C.Q.F.D.*
b) On passe de (P_1) *à (G) par une symétrie par rapport à l'axe (Ox) car toutes les ordonnées sont changées en leurs opposées, puis de (G) à (H)=*(P_2) *par une translation de vecteur de coordonnées (2 ;-2) car par le changement de variable* $X = x - 2$ *et* $Y = y + 2$ *dans h(x) on obtiendrait* $Y = g(X)$ *dans le repère de centre O'(2 ;-2. Donc la courbe de (H) est identique à celle de (G) que dans le repère de centre O'.*

II –1°) Parabole (P_3) *d'équation* $y = -x^2 + 6x - 6 = -f_2(x)$.
(P_3) *Symétrique de* (P_2) *par rapport à l'axe (Ox) (cf. figures)*
(P_3) *a pour sommet le point S de coordonnées* $x = 3$, $y = 3$
(P_3) *coupe l'axe (Ox) en* $x' = 3 + \sqrt{3}$ *et* $x'' = 3 - \sqrt{3}$
(P_3) *coupe l'axe (Oy) en y = -6. Axe de symétrie x=3.*



2°) Intersections avec les droites (Dm) *d'équations* $y = 2x + m$:
On résout l'équation aux abscisses des points d'intersection :
$-x^2 + 6x - 6 = 2x + m \Leftrightarrow x^2 - 4x + (m + 6) = 0$
Discriminant réduit : $\Delta' = b'^2 - ac = 4 - (m+6) = -m - 2$
$\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow m \leq -2$ *.donc :*
$m > -2 \Leftrightarrow \Delta' < 0 \Leftrightarrow$ *Aucun point d'intersection*
$m = -2 \Leftrightarrow \Delta' = 0 \Leftrightarrow$ *1 point d'intersection :* (D_{-2}) *tangente à* (P_3).
$m < -2 \Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow$ *2 points d'intersection :* (D_m) *sécante à* (P_3).

Pour $m = 0$ *: aucun point d'intersection.*
$m = -2$: (D_{-2}) *tangente à* (P_3). *au point d'abscisse* $x = -b/2a = -b' / a = 2$ *et d'ordonnée y =2*
$m = -3$: (D_{-3}) *sécante à* (P_3) *en deux points d'abscisses :* $x' = 1$ *et* $x'' = 3$.