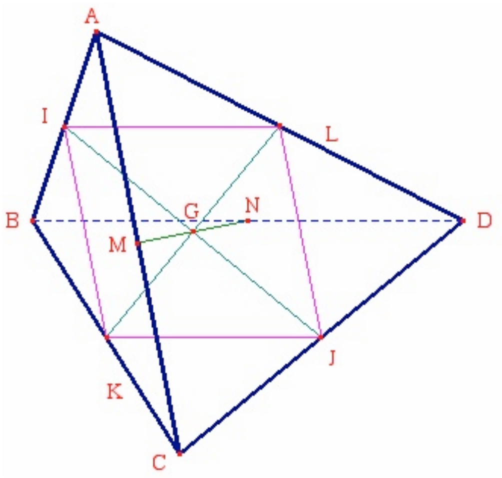
Révisions de géométrie et d'analyse

I – Géométrie de l'espace et barycentres : *[5 pts]*

On considère un tétraèdre ABCD. On note I, J, K, L, M, N les milieux respectifs des arêtes [AB], [CD], [BC], [AD], [AC] et [BD].

On désigne par G l'isobarycentre des points A, B, C, D.

1. Montrer que les droites (IJ), (KL) et (MN) sont concourantes en G.



Dans la suite de l'exercice, on suppose que AB = CD, BC = AD, AC = BD.
(On dit que le tétraèdre ABCD est équifacial, car ses faces sont isométriques).

2. a. Quelle est la nature du quadrilatère IKJL ? Justifier formellement la réponse. Préciser également la nature des quadrilatères IMJN et KNLM, sans démonstration.
b. En déduire que (IJ) et (KL) sont orthogonales. On admettra que, de même, les droites (IJ) et (MN) sont orthogonales et que les droites (KL) et (MN) sont orthogonales.
3. a. Montrer que la droite (IJ) est orthogonale au plan (MKN).
b. En déduire que (IJ) est orthogonale à (MK) puis que (IJ) est orthogonale (AB). On admettra que, de même (IJ) est orthogonale à la droite (CD).
c. On appelle plan médiateur d'un segment *le plan perpendiculaire à ce segment en son milieu. Montrer que G appartient aux plans médiateurs de [AB] et [CD], ainsi qu'au plan médiateur de [BC].*
d. En déduire que G est le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre ABCD.

II – Suite définie par récurrence *[7 pts]*: *Soit f la fonction définie par* $f(x) = \frac{1}{10}x(20-x)$

1. *On étudiera f exclusivement sur l'intervalle [0; 20].*
   a. *Calculer la dérivée de f et en déduire les variations de f sur [0; 20]*
   b. *En déduire que pour tout $x \in [0; 10]$, $f(x) \in [0; 10]$.*
   c. *Montrer que la fonction f admet un point fixe unique sur]0; 10].*
   d. *Tracer avec soin la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f dans un repère orthonormal du plan.*
2. *Soit (U_n) la suite définie par récurrence à l'aide de f par $U_o = 1$ et, pour tout $n \geq 0$, $U_{n+1} = f(U_n)$.*
   a. *Construire, sur l'axe des abscisses, du repère de $\mathcal{C}$ les cinq premiers termes de la suite (U_n).*
   b. *Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq U_n \leq U_{n+1} \leq 10$.*
   c. *En déduire que pour tout $n \geq 0$, on a :* $|U_{n+1}-10| \leq \frac{1}{10}|U_n-10|^2$, *d'où* $|U_{n+1}-10| \leq \frac{9}{10}|U_n-10|$
   d. *Démontrer alors par récurrence que, pour tout $n \geq 0$,* $0 \leq |U_n-10| \leq 9\left(\frac{9}{10}\right)^n$
   e. *En déduire la limite de la suite (U_n).* (On pourra admettre les résultats précédents).

III – Étude d'une fonction rationnelle : *[8 pts] Soit f la fonction définie par* $f(x) = \frac{2x^2-3x}{2x-4}$

1. *Indiquer les intervalles de définition et calculer les limites aux bornes de ces intervalles.*
2. *Déterminer les réels a, b, c tels que l'on puisse écrire* $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-2}$
3. *Calculer la dérivée de f et étudier son signe.*
4. *En déduire le tableau des variations et des limites de f.*
5. *Préciser dans le tableau les valeurs des extrema éventuels et les zéros de f.*
6. *Démontrer que la courbe $\mathcal{C}$ de f admet pour asymptote oblique la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x + 1/2$ et une asymptote « verticale » $\mathcal{V}$ dont on donnera l'équation.*
7. *Indiquer la position relative de $\mathcal{C}$ et de $\mathcal{D}$ pour tout $x \neq 2$.*
8. *Démontrer que la courbe $\mathcal{C}$ admet pour centre de symétrie le point I(2;5/2)*
9. *Calculer l'équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse $x = 3/2$.*
10. *Tracer avec soin les asymptotes $\mathcal{V}$ et $\mathcal{D}$, la tangente $\mathcal{T}$, et la courbe $\mathcal{C}$.*

That's all folks !