Trigonométrie

I – [10 pts] Formules d'addition et de multiplication des arcs :

1°) Réduire l'expression A(x) = cos 7x . sin 6x – sin 7x . cos 6x et calculer $A\left(\frac{\pi}{3}\right)$

A(x) = sin(6x – 7x) = sin(-x) = - sin(x) d'où A(π/3) = - sin(π/3) = -√3/2

2°) Réduire l'expression B(x) = cos x cos 2x – sin x . sin 2x ; calculer $B\left(\frac{\pi}{6}\right)$

B(x) = cos(x+2x) = cos (3x) d'où B(π/6) = cos(3π/6) = cos(π/2) = 0.

3°) Démontrer l'égalité suivante : 8 sin x . cos x . cos 2x . cos 4x = sin 8x

sin 8x = 2 sin 4x.cos 4x = 4 sin 2x.cos 2x. cos 4x = 8 sinx.cos x. cos 2x.cos 4x C.Q.F.D.

4°) Montrer que $\sin\frac{8\pi}{7} = -\sin\frac{\pi}{7}$ *en effet :* $\boxed{\sin\frac{8\pi}{7} = \sin(\pi + \frac{\pi}{7}) = -\sin\frac{\pi}{7}}$

5°) En déduire l'égalité suivante à l'aide du (3°) : $\cos\frac{\pi}{7}.\cos\frac{2\pi}{7}.\cos\frac{4\pi}{7} = -\frac{1}{8}$ *D'après 3°) on a :*

$\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}.\cos\frac{2\pi}{7}.\cos\frac{4\pi}{7} = \sin 8\frac{\pi}{7}$ *d'où* $\boxed{\cos\frac{\pi}{7}.\cos\frac{2\pi}{7}.\cos\frac{4\pi}{7} = \frac{\sin\frac{8\pi}{7}}{8\sin\frac{\pi}{7}} = \frac{-\sin\frac{\pi}{7}}{8\sin\frac{\pi}{7}} = -\frac{1}{8}}$

6°) Démontrer par la même méthode l'égalité suivante : $\cos\frac{\pi}{9}.\cos\frac{2\pi}{9}.\cos\frac{4\pi}{9} = \frac{1}{8}$

$$\boxed{\cos\frac{\pi}{9}.\cos\frac{2\pi}{9}.\cos\frac{4\pi}{9} = \frac{\sin\frac{8\pi}{9}}{8\sin\frac{\pi}{9}} = \frac{\sin(\pi - \frac{\pi}{9})}{8\sin\frac{\pi}{9}} = \frac{\sin\frac{\pi}{9}}{8\sin\frac{\pi}{9}} = \frac{1}{8}}$$

7°) On donne sin x = $-\frac{3}{5}$*, avec* $\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2}$*, en déduire cos x puis sin 2x.*

Avec $\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2}$ *on a cos x ≤ 0 donc* $\boxed{\cos x = -\sqrt{1-\sin^2 x} = -\sqrt{1-\frac{9}{25}} = -\sqrt{\frac{16}{25}} = -\frac{4}{5}}$

et sin 2x =2 sin x . cos x = $\boxed{\left(-\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{12}{25}}$ *(N.B. on ne demande pas x).*

8°) Calculer $\sin\frac{5\pi}{8}$ *par passage à l'arc double on a cos 2x =1 – 2.sin²x d'où* $\boxed{\sin^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}}$

D'où $\boxed{\sin\frac{5\pi}{8} = +\sqrt{\frac{1+\cos 2\left(\frac{5\pi}{8}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{1+\cos\frac{5\pi}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}$

9°) Réduire l'expression suivante : $T(x) = \tan(\pi + x) + \tan(\frac{\pi}{2} + x) + \tan(\pi - x) + \tan(\frac{\pi}{2} - x) \quad (x \neq k\frac{\pi}{2})$

$$\boxed{T(x) = \tan(x) - \frac{1}{\tan x} - \tan(x) + \frac{1}{\tan x} = 0 \quad (x \neq k\frac{\pi}{2})}$$

10°)Réduire l'expression suivante : $C(x) = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$ *(utiliser le passage à l'arc moitié)*

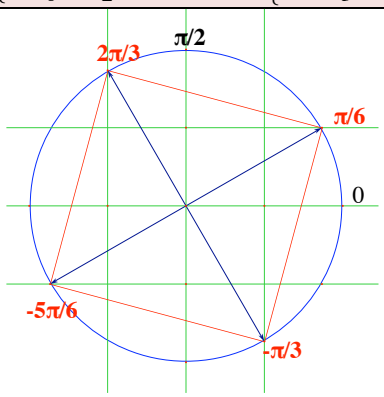
$$\boxed{C(x) = \frac{1-\cos x}{1+\cos x} = \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}} = \tan^2\frac{x}{2}}$$

II– [10 pts] Équations trigonométriques :

1°) Résoudre les équations suivantes dans l'intervalle]-π ; π] et représenter les solutions sur le cercle trigonométrique :

a. $\boxed{\cos(x-\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos(x-\frac{\pi}{3})=\cos\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x-\frac{\pi}{3}=\pm\frac{\pi}{3}+k.2\pi \Leftrightarrow x=\frac{2\pi}{3} \text{ ou } x=0 \text{ dans }]-\pi;\pi].}$

b. $\boxed{\cos(x-\frac{\pi}{6})=\sin 3x=\cos(\frac{\pi}{2}-3x) \Leftrightarrow \begin{cases} x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}-3x+k.2\pi \\ x-\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{2}+3x+k.2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x=\frac{2\pi}{3}+k.2\pi \\ 2x=\frac{\pi}{3}-k.2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{\pi}{6}+k\frac{\pi}{2} \\ x=\frac{\pi}{6}-k\pi \end{cases} \Leftrightarrow x\in\left\{\frac{\pi}{6};\frac{2\pi}{3};-\frac{\pi}{3};-\frac{5\pi}{6}\right\}}$



2°) Factoriser l'expression puis résoudre l'équation :

a. *u(x) = cos 2x + 2 cos x + 1 = 0*

u(x) =2cos²x + 2 cos x =2cos x (cos x + 1) d'où u(x) = 0⇔ cos x = 0 ou cos x =-1 ⇔ $\boxed{x=\pm\pi/2 \text{ ou } x=\pi}$

b. *v(x) = sin 2x – 2 sin x =0*

v(x) =2sin x.cos x – 2 sin x = 2sin x (cos x – 1) d'où v(x) = 0⇔ sin x = 0 ou cos x =1 ⇔ $\boxed{x=0 \text{ ou } x=\pi}$

3°) Soit f(x) = cos 2x — 2 sin x + $\frac{1}{2}$

a. *Mettre la fonction f sous la forme d'un polynôme du second degré en X = sin x*

$f(x) = 1-2\sin^2 x-2\sin x+\frac{1}{2} = -2\sin^2 x-2\sin x+\frac{3}{2} = \boxed{\left(-\frac{1}{2}\right)\left[4X^2+4X-3\right]}$

b. *Résoudre l'équation* $4X^2+4X-3=0 \Leftrightarrow (2X+1)^2=4 \Leftrightarrow 2X+1=2$ *ou* $2X+1=-2$

$\Leftrightarrow \boxed{X=\frac{1}{2} \text{ ou } X=-\frac{3}{2}}$

c. *En déduire les solutions de l'équation f(x) = 0 dans l'intervalle]-π ;π].*

$\boxed{f(x)=0 \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)\left[4X^2+4X-3\right]=0 \Leftrightarrow 4X^2+4X-3=0 \text{ et } |X=\sin x|\le 1 \Leftrightarrow \sin x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6} \text{ ou } x=\frac{5\pi}{6}}$