1ère S3 /mcb **CONTRÔLE 3** 15/02/07

A. (2,5)

1. a) Démontrez que :

$$8\sin x\,\cos x\,\cos 2x\,\cos 4x = \sin 8x$$

b) Démontrez que $\sin\frac{8\pi}{7} = -\sin\frac{\pi}{7}$.

c) Déduisez-en que :

$$\cos\frac{\pi}{7}\,\cos\frac{2\pi}{7}\,\cos\frac{4\pi}{7} = -\frac{1}{8}.$$

2. Démontrez de la même manière que :

$$\cos\frac{\pi}{9}\,\cos\frac{2\pi}{9}\,\cos\frac{4\pi}{9} = \frac{1}{8}.$$

B. (1)

Réduisez les expressions suivantes :

$A(x) = \cos 7x\sin 6x - \sin 7x\cos 6x$.

$B(x) = \cos x\cos 2x - \sin x\sin 2x$.

C. (1) $\sin x = -\frac{3}{5}$ et $x \in \left[\frac{\pi}{2} ; \frac{3\pi}{2}\right]$. Calculez $\sin 2x$

D. (2) x désignant un réel différent de $k\frac{\pi}{2}$, où k est un entier relatif, exprimer en fonction de $\tan x$:

$\tan\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$, $\tan\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$, $\tan(x+\pi)$ et $\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$.

E. (3)

a, b, c sont trois réels tels que : $a + b + c = \pi$

1) Calculer $\cos c$ en fonction de $\cos a, \sin a, \cos b, \sin b$.

2) En déduire $\sin^2 a \sin^2 b$ en fonction de $\cos a, \cos b, \cos c$.

3) En déduire enfin que, lorsque $a + b + c = \pi$, on a :

$$\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c + 2\cos a\,\cos b\,\cos c = 1$$

F. (4) Résoudre les équations ou inéquations suivantes :

1) $\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ dans $[-\pi ; \pi]$

2) $\cos x \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$ dans $[-\pi ; 3\pi]$

3) $\sin(3x) = \cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ dans $[0 ; 2\pi[$

G. (3)

1) Etudier les variations de la fonction f telle que :
$f(x) = \sin^2 x\cos^2 x$

2) Tracer la courbe représentative de f dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ avec $\|\vec{i}\| = 1$ cm et $\|\vec{j}\| = 4$ cm

Le plan est muni du repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Placer les points A, B, C ayant respectivement pour coordonnées polaires :

$A[3 ; \frac{3\pi}{4}]$; $B[2 ; \frac{-5\pi}{6}]$; $C[2 ; \frac{\pi}{3}]$

2) Déterminer les coordonnées cartésiennes des points A, B, C et montrer que le triangle ABC est isocèle en A.

3) Calculer $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC})$ et $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ et retrouver le dernier résultat.

A. (2,5)

1) a) $\sin 8x = 2\sin 4x \cos 4x = 2\times 2 \sin 2x \cos 2x \cos 4x$
$= 4\,(2\cos x \sin x)\cos 2x \cos 4x = 8 \sin x \cos x \cos 2x \cos$

b) $\sin \frac{8\pi}{7} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{7}\right) = -\sin\frac{\pi}{7}$ car $\sin(\pi + x) = -\sin x$

c) d'après a) $\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7} = \dfrac{\sin 8\pi/7}{8\sin \pi/7} = \dfrac{-\sin \pi/7}{8 \sin \pi/7} = -$

2) d'après a) $\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9} = \dfrac{\sin 8\pi/9}{8\sin\pi/9} = \dfrac{\sin(\pi - \pi/9)}{8\sin\pi/9} = \dfrac{\sin \pi/9}{8\sin \pi}$
$= \dfrac{1}{8}$

B. (1)

$A(x) = \sin(6x - 7x) = \sin(-x) = -\sin x$
$B(x) = \cos(x + 2x) = \cos(3x)$

C. (1)

$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$ donc $\cos x = \frac{4}{5}$ ou $-\frac{4}{5}$
avec $x \in \left[\frac{\pi}{2} ; \frac{3\pi}{2}\right]$, $\cos x < 0$ donc $\cos x = -\frac{4}{5}$
$\sin 2x = 2 \sin x \cos x = 2\left(-\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{24}{25}$

D. (2)

$\tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\sin(x+\pi/2)}{\cos(x+\pi/2)} = \dfrac{\cos x}{-\sin x} = -\dfrac{1}{\tan x}$

$\tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\sin(x - \pi/2)}{\cos(x-\pi/2)} = \dfrac{-\sin(\pi/2 - x)}{\cos(\pi/2 - x)} = \dfrac{-\cos x}{\sin x} = -\dfrac{1}{\tan x}$

$\tan(x + \pi) = \dfrac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \dfrac{-\sin x}{-\cos x} = \tan x$

$\tan(\pi/2 - x) = \dfrac{\sin(\pi/2 - x)}{\cos(\pi/2 - x)} = \dfrac{\cos x}{\sin x} = \dfrac{1}{\tan x}$

E. (3)

$a + b + c = \pi$

1) $c = \pi - (a+b)$
$\cos c = \cos(\pi - (a+b)) = -\cos(a+b) = -(\cos a \cos b - \sin a \sin b)$
$\cos c = \sin a \sin b - \cos a \cos b$

2) $\sin a \sin b = \cos a \cos b + \cos c$
$\sin^2 a \sin^2 b = (\cos a \cos b + \cos c)^2 = \cos^2 a \cos^2 b + \cos^2 c + 2 \cos a \cos b$

3) $\sin^2 a \sin^2 b = (1 - \cos^2 a)(1 - \cos^2 b) = 1 - \cos^2 a - \cos^2 b + \cos^2 a \cos$

donc $\cos^2 a \cos^2 b + \cos^2 c + 2\cos a \cos b \cos c = 1 - \cos^2 a - \cos^2 b + \cos^2 a \cos$
$\Rightarrow \cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c = 1$

F.

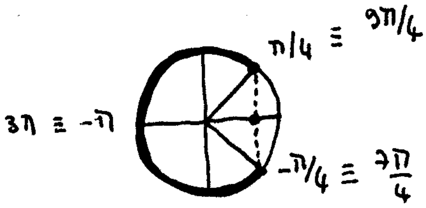
(1)

1) $\cos(x - \pi/3) = \cos \pi/3 \iff x - \pi/3 = \pi/3 + 2k\pi$ ou $x - \pi/3 = -\pi/3 + 2k$
$\iff x = 2\pi/3 + 2k\pi$ ou $x = 0 + 2k\pi$

$S_{[-\pi;\pi]} = \left\{ 0 ; \frac{2\pi}{3} \right\}$

(1)

2) $\cos x \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$



$x \in \left[-\pi ; -\frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{\pi}{4} ; \frac{7\pi}{4}\right]$
$\cup \left[\frac{9\pi}{4} ; 3\pi\right]$

3) $\sin 3x = \cos(x - \pi/6) \iff \cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) = \cos(x - \pi/6)$

$\iff \frac{\pi}{2} - 3x = x - \pi/6 + 2k\pi$ ou $\frac{\pi}{2} - 3x = -x + \frac{\pi}{6} + 2k\pi$

$\iff -4x = -\frac{\pi}{2} - \pi/6 + 2k\pi$ ou $-2x = -\pi/2 + \pi/6 + 2k\pi$

② $\iff -4x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ ou $-2x = -\pi/3 + 2k\pi$

$\iff 4x = \frac{2\pi}{3} - 2k\pi$ ou $2x = \pi/3 - 2k\pi$

$\iff x = \frac{\pi}{6} - \frac{k\pi}{2}$ ou $x = \pi/6 - k\pi$

dans $[0; 2\pi[$: $x = \frac{\pi}{6}$ ou $\pi/6 + \pi/2$ ou $\pi/6 + \pi$ ou $\pi/6 + 3\pi/2$

$$S_{[0;2\pi[} = \left\{ \frac{\pi}{6} ; \frac{2\pi}{3} ; \frac{7\pi}{6} ; \frac{5\pi}{3} \right\}$$

G. 1) f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$

• $f(x+\pi) = \sin^2(x+\pi)\cos^2(x+\pi) = (-\sin x)^2(-\cos x)^2 = f(x)$

0,5 f est périodique de période $T = \pi$

• $f(-x) = \sin^2(-x)\cos^2(-x) = (-\sin x)^2 \cos^2 x = f(x)$

0,5 f est paire

on peut étudier f sur $[0; \pi/2]$ puis en déduire la courbe sur $[-\pi/2; 0]$ par symétrie d'axe (oy)

$f'(x) = (2\sin x\cos x)\cos^2 x + \sin^2 x\,(2\cos x(-\sin x))$

$= 2\sin x\cos^3 x - 2\sin^3 x\cos x$

1 $= 2\sin x\cos x(\cos^2 x - \sin^2 x) = \sin(2x)\cos(2x)$

③ $x \in [0; \pi/2]$ donc $2x \in [0; \pi]$ donc $\sin(2x) \geqslant 0$

$\cos(2x)$ change de signe pour $x = \pi/4$

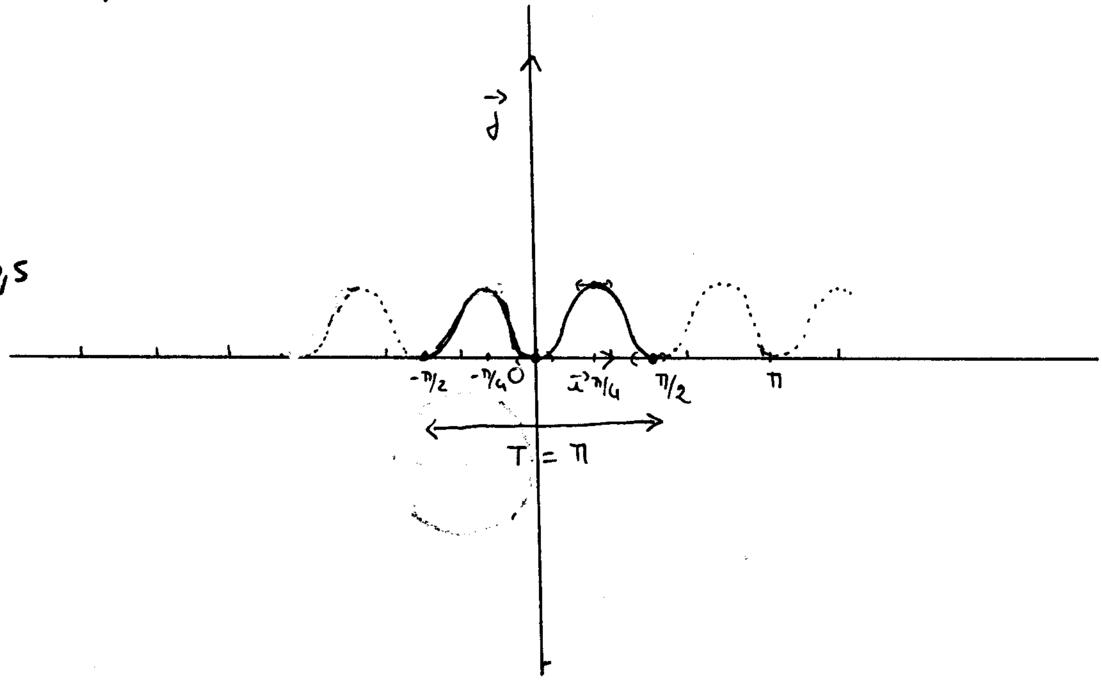
0,5

x	0		$\pi/4$		$\pi/2$
$\sin 2x$		$+$		$+$	
$\cos 2x$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	0	$\nearrow$	$1/4$	$\searrow$	0

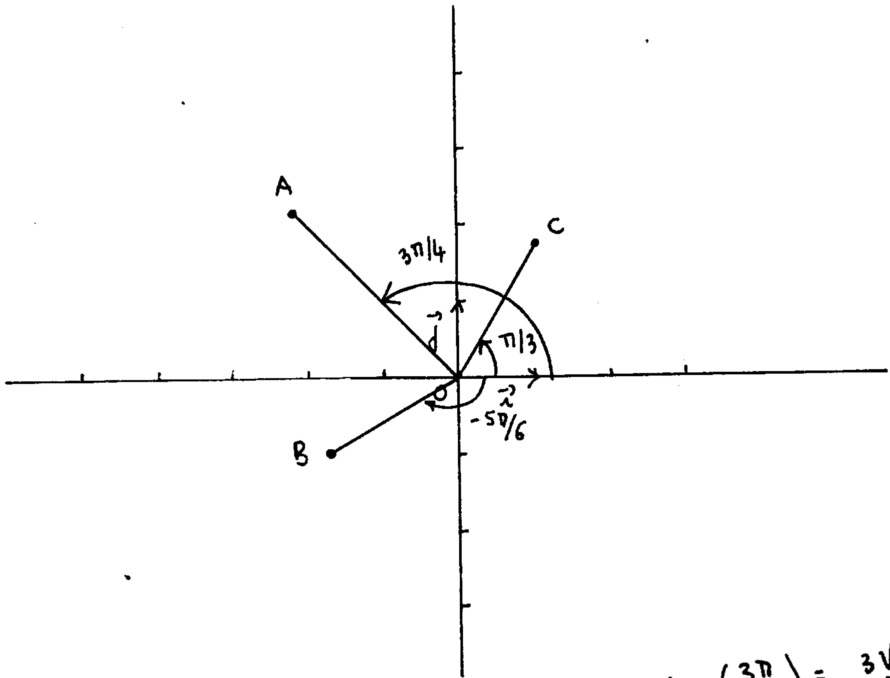
$f'(0) = 0$, $f'(\pi/2) = 0$ } tangentes horizontales en o et en $\pi/2$

$f'(\pi/4) = 0$

0,5



H. 1)



(1,5)

2) $x_A = 3\cos(3\pi/4) = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$ $\quad y_A = 3\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

$A\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2} ; \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$

$x_B = 2\cos(-5\pi/6) = -2\,\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad y_B = 2\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = -1$

$B(-\sqrt{3} ; -1)$

$x_C = 2\cos(\pi/3) = 1$ $\quad y_C = 2\sin\pi/3 = 2\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

(2)

$C(1 ; \sqrt{3})$

$\vec{AB}\begin{pmatrix} -\sqrt{3}+\frac{3\sqrt{2}}{2} \\ -1-\frac{3\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix} \Rightarrow AB^2 = \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}-\sqrt{3}\right)^2+\left(-1-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2$

$\left(AB^2 = \frac{9}{2}+3-3\sqrt{6}+1+\frac{9}{2}+3\sqrt{2} = 13+3\sqrt{2}-3\right.$

$\vec{AC}\begin{pmatrix} 1+\frac{3\sqrt{2}}{2} \\ \sqrt{3}-\frac{3\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$ $\quad AC^2 = \left(1+\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\sqrt{3}-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right) = AB^2$

donc $AB = AC$

3) $(\vec{OA},\vec{OC}) = (\vec{OA},\vec{i}) + (\vec{i},\vec{OC}) = -\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{3} = \frac{-5\pi}{12}$

$(\vec{OA},\vec{OB}) = (\vec{OA},\vec{i}) + (\vec{i},\vec{OB}) = -\frac{3\pi}{4}-\frac{5\pi}{6} = \frac{-19\pi}{12} \equiv \frac{5\pi}{12}$

donc $\left.\begin{array}{l}\widehat{COA} = \widehat{AOB} \\ OB = OC \\ OA \text{ commun}\end{array}\right\}$ OAB et OAC ont un angle égal compris entre deux cotés égaux 2 à 2

(1) bonus

les triangles OAB et OAC sont isométriques

donc $AB = AC$