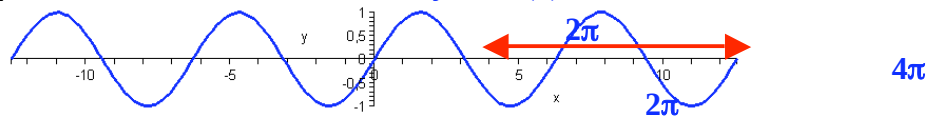


Etude des fonctions Trigonométriques élémentaires

1°) Fonctions Sinus et associées, de la forme

$$f : x \rightarrow y = A \sin(ax + b)$$

Par exemple en prenant $A = 1$, $a = 1$, $b = 0$, on a $y = \sin(x)$ et la courbe ci-dessous :



On observe sur cette courbe, que quelque soit $x \in \mathbb{R}$, quelque soit $k \in \mathbb{Z}$.

$$f(x) = f(x + 2\pi) = f(x + 4\pi) = f(x - 2\pi) = f(x - 4\pi) = \dots = f(x + k \cdot 2\pi)$$

On dit que la fonction sinus est Périodique, de Période 2π .

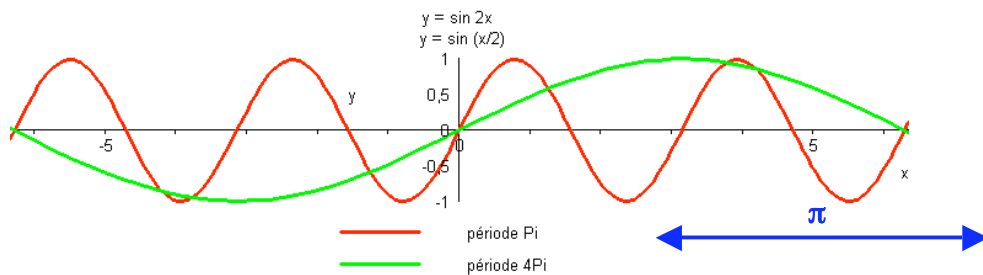
- **Définition** : Une fonction f est dite **périodique de période T** , si et seulement si T est le plus petit nombre réel positif tel que, quelque soit $x \in D_f$, $f(x + T) = f(x)$.
Par conséquent la courbe de f coïncide en tout point avec sa transformée par translation de vecteur $\vec{u} = T \vec{i}$, et pour construire la courbe représentative de f il suffit d'en connaître la représentation sur un intervalle de longueur T , puis de reproduire la courbe obtenue par translation de vecteur $\vec{u} = -kT \vec{i}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

► **Théorème** : toute fonction de la forme $f : x \rightarrow y = A \sin(ax + b)$ ($a > 0$), a pour période $T = 2\pi/a$.

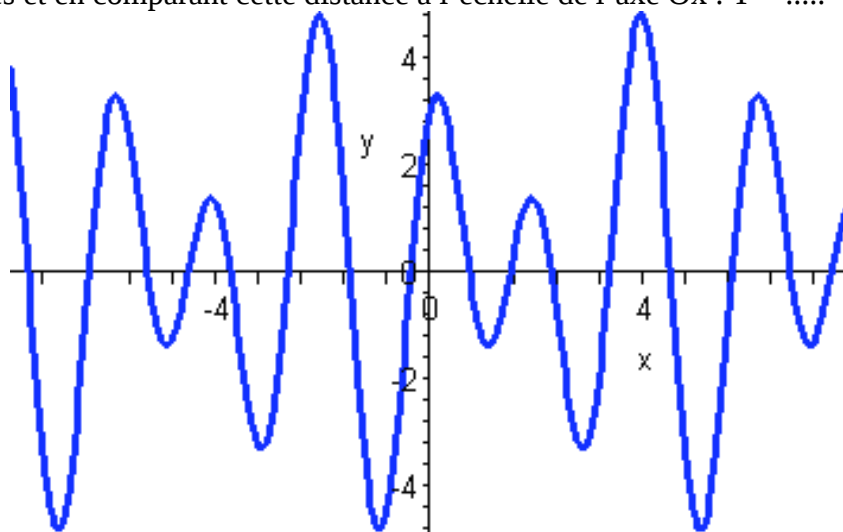
en effet : $f(x + 2\pi/a) = A \sin[a(x + 2\pi/a) + b] = A \sin(ax + 2\pi + b) = A \sin(ax + b) = f(x)$.

Le coefficient a de x s'appelle la "*pulsation*" de la fonction, le coefficient A s'appelle l'*amplitude*.

Exemples :



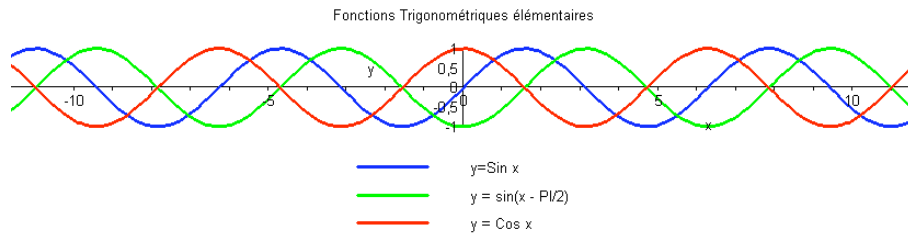
- **Exercice pratique** : déterminer la période de la fonction représentée ci-dessous en mesurant la distance de 2 pts homologues et en comparant cette distance à l'échelle de l'axe Ox : $T = \dots$



On suppose que cette courbe représente la fonction $g : x \rightarrow y = 3 \cos(\pi x) + 2 \sin(2\pi x/3)$, montrer que quelque soit $x \in \mathbb{R}$, on a $g(x + 6) = g(x)$.

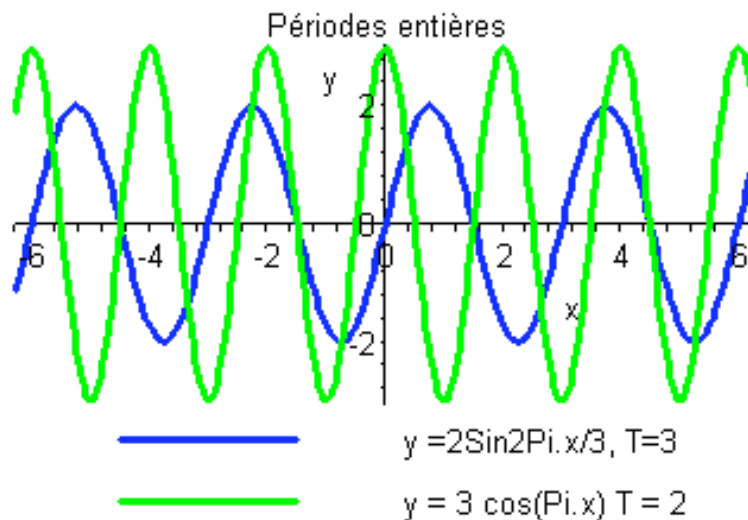
- **Construction de la fonction Cosinus** :

Etude des fonctions Trigonométriques élémentaires



Dans la figure ci-dessus on constate que la courbe (2) [verte] est translatée de la courbe (1) [bleue] de $\pi/2$ vers la droite, tandis que la courbe (3) [rouge], est symétrique de la (2) par rapport à l'axe (Ox) « horizontal » et représente la fonction Cosinus : en effet on sait que $\cos x = \sin(\pi/2 - x) = -\sin(x - \pi/2)$. Par conséquent la fonction *Cosinus* a la même période que la fonction *Sinus* c'est à dire 2π .

● **Autres exemples** : si le coefficient de x est un multiple de π alors la période est nécessairement un nombre entier ou fractionnaire :



On pourra remarquer que la fonction g obtenue plus haut est la somme de ces deux fonctions.

► **Théorème** : la somme de deux fonctions périodiques y_1 et y_2 de périodes respectives T_1 et T_2 est une fonction périodique de période T égale au P.P.C.M (Plus Petit Commun Multiple) des deux nombres T_1 et T_2 .

Exemples :
 si $T_1 = 2$ et $T_2 = 3$ alors $T = 6$
 si $T_1 = 2$ et $T_2 = 5$ alors $T = 10$
 si $T_1 = 2$ et $T_2 = 1$ alors $T = 2$
 si $T_1 = 2$ et $T_2 = 4$ alors $T = 4$
 si $T_1 = 2\pi$ et $T_2 = 3\pi$ alors $T = 6\pi$

Autre exemple la courbe ci-dessous : représente la fonction définie par : $f(x) = \sin(\pi \cdot x/2)$ période : $T = 4$.

