Révisions et Compléments / Suites Numériques

I - **Suites Arithmétiques – Suites Géométriques et Séries associées**

1°) (U_n) dite **arithmétique** ssi quelque soit n, la *différence* de 2 termes consécutifs est constante :
i.e. quelque soit n, $\boxed{U_{n+1} - U_n = r}$ (constante) et donc (par récurrence immédiate) en posant $U_0 = a$, (1^{er} terme) raison r, $\boxed{U_n = a + n.r}$.

2°) (V_n) dite **Géométrique** ssi quelque soit n, le *rapport* de 2 termes consécutifs est constant :
i.e. quelque soit n, $\boxed{V_{n+1} / V_n = q}$ (constante) et donc en posant $V_0 = a$, $\boxed{V_n = a.q^n}$.

3°) **Série** associée à une suite : on appelle série de terme général U_n la suite définie par la *somme* des (n+1) premiers termes de la suite U_n : $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \ldots + U_n$

a) Si (U_n) est arithmétique on a $S_n = (n+1)\,a + r\,(1 + 2 + \ldots + n) = (n+1)a + r.n(n+1)/2$
D'où $S_n = (n+1)[\,U_0 + U_n]\,/2$

b) Si (U_n) est géométrique on a $S_n = U_0\,[1 + q + q^2 + \ldots + q^n] = U_0\dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

En particulier si $|q| < 1$ on sait que $U_n = a.q^n$ tend vers 0 et donc $\mathrm{Lim}\,(S_n) = \dfrac{U_0}{1 - q}$

II – **Raisonnement par Récurrence** : (rappel de $1^{ère}$ Classe …)

Étant donné une propriété notée (P_n) faisant intervenir l'entier Naturel n.
On peut souvent démontrer (P_n) en appliquant le *principe d'induction* ou « raisonnement par récurrence. Pour cela on procède en 3 étapes :

$1^{ère}$ Étape : **INITialisation** : on démontre « à la main » que **(P_0) est vraie**, ou que (P_1) est vraie.

2^{e} Étape : **HEREDITE** : on démontre à l'aide des propriétés connues par l'énoncé ou en vertu des règles de calcul habituelles que la propriété (P_n) est héréditaire, c'est à dire que l'*implication* : $\boxed{\mathbf{(P_n) \Rightarrow (P_{n+1})}}$ est vraie pour n fixé, quelconque.

N.B. : cela ne suppose pas que (P_n) est vrai pour tout n, mais seulement que si (P_n) est vrai pour une certain rang n, alors cela entraîne que (P_{n+1}) l'est aussi.

3^{e} Étape : on en conclut que (P_n) est vraie pour tout n en vertu du principe d'induction (procédé inverse de la déduction).

III – **Techniques de démonstration pour les suites Récurrentes :**

Soit (U_n) une suite définie par récurrence à l'aide d'une fonction numérique f connue.

$$\boxed{U_{n+1} = f(U_n) \text{ et } U_0 = a} \text{ (constante donnée).}$$

1°) Pour montrer que **(U_n) est majorée**, ou minorée, ou bornée, il suffit souvent d'utiliser les propriétés de la fonction f pour établir la propriété par récurrence.

Par exemple : si la fonction f admet un *point fixe* a (i.e. tel que f(a) = a.) et si f est croissante sur un intervalle I, contenant (U_n) et a,
on peut prouver que $U_n < a$ quelque soit n, très simplement par récurrence quasi immédiate en observant que l'hérédité résulte immédiatement du fait que, *par définition de la croissance d'une fonction*, l'inégalité est conservée en appliquant f aux deux membres :

$$[U_n < a\,] \Rightarrow [\,f(U_n) < f(a)\,] \Rightarrow [U_{n+1} < a\,]$$

On peut souvent aussi démontrer ces implications directement sans utiliser le sens de variation de f mais c'est généralement plus long que d'établir le sens de variation de f à l'aide du signe de sa dérivée.

2°) Pour montrer que **(U_n) est monotone** il suffit souvent de montrer que f est croissante sur l'intervalle contenant (U_n). Dans ce cas encore ou a évidemment :

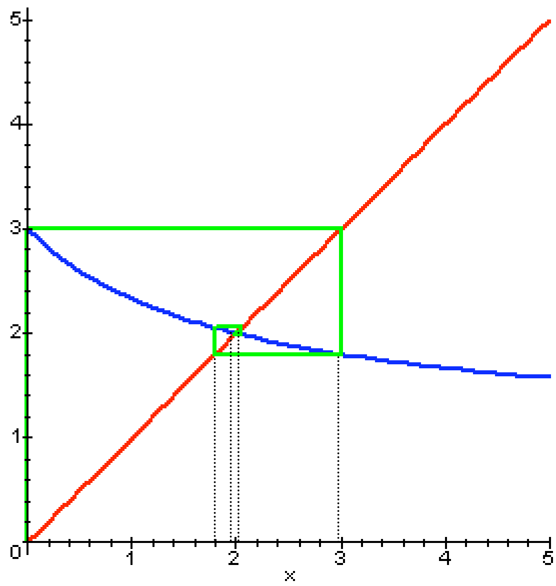
$$(P_n) : [U_n < U_{n+1}\,] \Rightarrow [\,f(U_n) < f(U_{n+1})\,] \Rightarrow [U_{n+1} < U_{n+2}\,] : (P_{n+1}) \quad \text{(i)}$$

ou

$$(P_n) : [U_n > U_{n+1}\,] \Rightarrow [\,f(U_n) > f(U_{n+1})\,] \Rightarrow [U_{n+1} > U_{n+2}\,] : (P_{n+1}) \quad \text{(ii)}$$

Les implications (i) montreraient que la suite (U_n) est croissante (si toutefois l'initialisation est vraie).
Les implications (ii) montreraient que la suite (U_n) est décroissante (si toutefois l'init. est vraie).

Suites Numériques définies par récurrence



Exemple type : $f(x) = \frac{x+6}{x+2} = \frac{4}{x+2} + 1$ est une fonction décroissante sur $[0\ ;+\infty\ [$, de plus elle admet un point fixe sur cet intervalle car l'équation $f(x) = x$ admet pour solutions $x = -3$ ou $x = 2 > 0$ i.e. $f(2) = 2$ (car $-3 \notin [0\ ;+\infty\ [$)

Donc en posant $U_{n+1} = f(U_n)$ i.e. $U_{n+1} = \frac{U_n + 6}{U_n + 2}$ et $U_0 = 0$ on se trouve exactement dans la situation du § 3°) ci-dessus.

On (*pronom indéfini malhonnête*) sait de plus, que la représentation graphique d'une telle suite donne un « colimaçon » dont le centre est le point d'intersection de la courbe de f et de la 1ère bissectrice, qui correspond au point fixe de f.
On observe sur la figure ci-contre que la suite (U_n) est représentée par les points de l'axe Ox correspondant aux abscisses des points d'intersection de la courbe et du colimaçon.
Cette suite n'est évidemment pas monotone, par contre elle est évidemment bornée (par 0 à gauche, et par 3 à droite). De plus la suite des termes de rang pair : U_0 , U_2 , U_4 … est croissante, et la suite des termes de rang impair U_1 , U_3 , U_5 … est décroissante.

(On démontre cela aisément à l'aide des remarques du § 3°) ci-dessus).

Naturellement on doit pouvoir démontrer que (U_n) converge vers 2 (pt fixe de f).
Pour cela il existe plusieurs méthodes qui sont indiquées dans les énoncés des problèmes de ce type.

1ère méthode : (style 1ère classe) on construit une suite auxiliaire (V_n) définie par $V_n = \frac{U_n - 2}{U_n + 3}$

(où l'on observera judicieusement que 2 et –3 sont les solutions de l'équation du point fixe de f …)

On démontre alors que la suite (V_n) est géométrique (ici de raison $q = \frac{-1}{4}$) donc que (V_n) converge vers 0 et par suite (sic !) que $U_n = \frac{2 + 3V_n}{1 - V_n}$ a pour limite 2.

2e méthode : (style Terminale) on démontre que la suite des termes de rang pair et la suite des termes de rang impair sont adjacentes, et donc convergent vers une même limite λ et que cette limite ne peut être que l'un des points fixes de f, puisque par passage à la limite dans $U_{n+1} = f(U_n)$ obtient évidemment $\lambda = f(\lambda)$ donc que λ est bien l'une des solutions de l'équation $f(x) = x$.