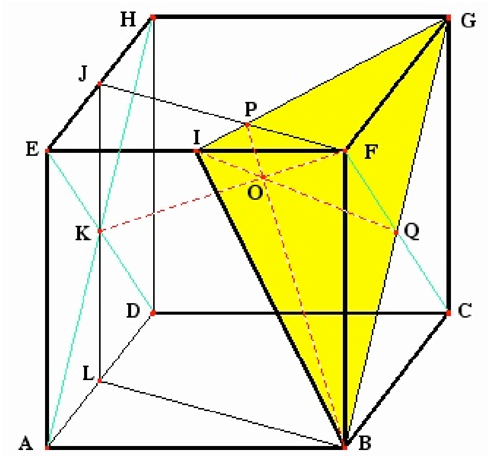
jml@ecole-alsacienne.org
2006-2007

MATHÉMATIQUES - $1^{\text{ères}}$ S_2 **AB**
Cont.N°7• 11 mai • 100 min.

Géométrie de l'espace – Barycentres - Homothéties

I. [6 points] <u>Orthogonalité dans un cube</u>

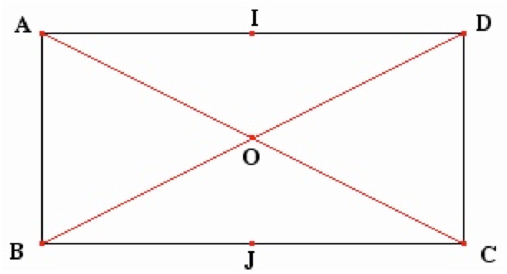
Dans le cube ci- contre, I est le milieu de [EF], J est le milieu de [EH], K est le milieu de la face AEHD du cube.
Soit P l'intersection de (JF) et (IG) , Q celle de (BG) et (FC), et O l'intersection de (PB) et (IQ) dans le plan (BIG).
Justifier les réponses en indiquant les théorèmes utilisés.



1°) Démontrer que (EF) est orthogonale à (BG)
2°) Démontrer que (BG) est perpendiculaire au plan (EFCD)
3°) En déduire que (KF) est orthogonale à (BG)
4°) Démontrer que le triangle IPF est rectangle en P.
5°) Démontrer que (BF) est orthogonale à (GI)
6°) En déduire que (GI) est perpendiculaire au plan (JFBL)
7°) En déduire que (KF) est orthogonale à (GI).
8°) Déduire des questions précédentes que (KF) est perpendiculaire au plan (BIG)
9°) Déterminer les intersections du plan (BIG) respectivement avec les plans (EFCD) et (BFJL).
10°) Démontrer que (KF) perce le plan (BIG) en O.

II. [4 points] <u>Barycentres dans le plan</u>

Soit ABCD un rectangle de centre O, I et J les milieux des côtés AD et BC.

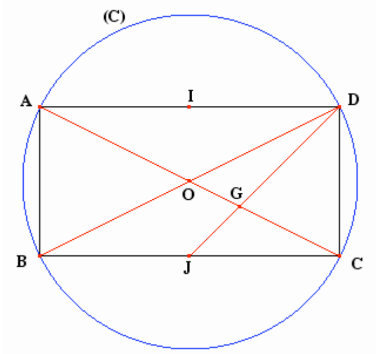


1°) Démontrer que O est l'ISO barycentre des points A,B,C,D.
2°) En déduire une expression simplifiée de la somme vectorielle $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}$.
3°) Démontrer l'égalité suivante : $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{OI}$
4°) Déduire des questions précédentes l'ensemble des points M du plan vérifiant la relation

$$\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right\|$$

III. [5 points] <u>Homothéties dans le plan</u>

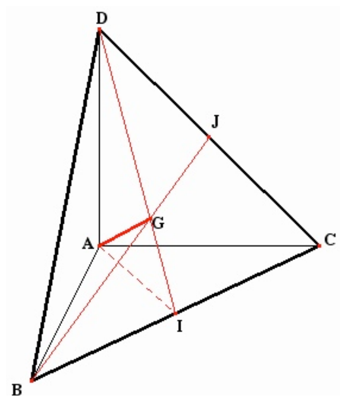
Soit ABCD un rectangle de centre O, I et J les milieux des côtés AD et BC, G l'intersection de JD et AC, *h* l'homothétie de centre G et de rapport –1/2



1°) Démontrer que G est le centre de gravité du triangle BCD
2°) Déterminer et construire les images de ABCD par l'homothétie *h[G ;-1/2]*.
3°) Construire l'image (C') du cercle (C) par *h[G ;-1/2]*
4°) Soit *h'* l'homothétie de centre C et de rapport 2. Construire l'image par *h'[C ;2]* du cercle circonscrit au triangle JOC, puis celle du cercle de diamètre OJ.

IV. [5 points] <u>Tétraèdre tri-rectangle</u>

Soit ABCD un tétraèdre tel que ABC, ABD, et ACD soient des triangles rectangles isocèles en A avec AB = AC = AD = a. Soit G le centre de gravité du triangle BCD.



1°) Démontrer que la droite (AG) est perpendiculaire au plan (BCD).
2°) On appelle O l'isobarycentre du tétraèdre ABCD, démontrer que le point O appartient au segment AG et déterminer sa position.
3°) Calculer l'aire des triangles ABC et BCD en fonction de a.
4°) Calculer le volume du tétraèdre ABCD en prenant AD pour hauteur, en fonction de a. (V = *1/3* x *Base* x *Hauteur*)
5°) Exprimer le volume du tétraèdre ABCD à l'aide de AG. En déduire la longueur de AG en fonction de a.