Suites numériques – Trigonométrie – Produit scalaire
Géométrie Analytique

[*Calculatrices non autorisées*]

I – **Suites numériques**

[A] [5 pts] : *Soit* (u_n) la suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ *et* $u_0 = 6$. *avec* $f(x) = \dfrac{7x+3}{2x+2}$

1°) Étudier le sens de variation et représenter graphiquement cette fonction sur $[0 ; +\infty[$

2°) Construire graphiquement les premiers termes de la suite (u_n) sur l'axe des abscisses.

3°) Résoudre l'équation $f(x) = x$ sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ (point fixe de f).

4°) Quelles conjectures peut-on faire, d'après la figure, sur les propriétés de la suite (u_n) : sens de variation ? bornes ? Convergence?

5°) Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a : $3 \leq u_n \leq 6$.

6°) Démontrer par récurrence que (u_n) est décroissante.

[B] [3 pts] On pose $v_n = \dfrac{2u_n - 6}{2u_n + 1}$.

a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique : calculer sa raison et son 1er terme.
b) Exprimer v_n en fonction de n, et indiquer sa limite.
c) Exprimer u_n en fonction de v_n, en déduire la limite de (u_n).

II – **Trigonométrie**

[A] [2,5 pts] On pose

$$A = Cos^2\frac{\pi}{8} + Cos^2\frac{3\pi}{8} + Cos^2\frac{5\pi}{8} + Cos^2\frac{7\pi}{8}$$
$$B = Sin^2\frac{\pi}{8} + Sin^2\frac{3\pi}{8} + Sin^2\frac{5\pi}{8} + Sin^2\frac{7\pi}{8}$$

1°) Rappeler la formule de $Cos(2x)$ en fonction de $Cos\,x$ et de $Sin\,x$.

2°) Calculer A + B et A – B.

3°) En déduire A et B.

[B] [2 pts]: 1°) Calculer $Cos(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4})$ et $Sin(\frac{7\pi}{12})$.

2°) En déduire la résolution dans l'intervalle $]-\pi ; \pi]$ de l'équation :

$$(\sqrt{6} - \sqrt{2})Cos(x) + (\sqrt{6} + \sqrt{2})Sin(x) = 2$$

III– **Produit Scalaire et Géométrie analytique**

[A] [2,5 pts]] On donne les vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ tels que :

$$\|\vec{U}\| = 3 \text{ , } \|\vec{V}\| = 2 \text{ et } \vec{U} \bullet \vec{V} = -3$$

1°) Déterminer la position relative de $\vec{U}$ et $\vec{V}$ et faire une figure.

2°) Calculer $(\vec{U} + \vec{V})^2$ et en déduire $\|\vec{U} + \vec{V}\|$.

3°) Construire le vecteur $2\vec{U} + 3\vec{V}$ et calculer sa norme.

[B] [2 pts] Étant donnés deux points fixes A et B distants de 5 cm, et I le milieu de [AB]

1°) Déterminer géométriquement et construire l'ensemble des points M du plan tels que
$$MA^2 + MB^2 = 30,5$$

2°) Déterminer géométriquement et construire l'ensemble des points M du plan tels que
$$MA^2 - MB^2 = 20$$

[C] [3 pts] Dans un repère orthonormé $[O;(\vec{i},\vec{j})]$ on donne les points A(-2 ;1) et B(1;5).

On note M un point du plan de coordonnées $(x;y)$ dans ce repère.

1°) Calculer MA^2 et MB^2 en fonction de x et y.

2°) Déterminer l'équation et construire l'ensemble des points M du plan tels que $MA^2 + MB^2 = 30,5$

3°) Déterminer l'équation et construire l'ensemble des points M du plan tels que $MA^2 - MB^2 = 20$

Suites numériques – Trigonométrie – Produit scalaire
Géométrie Analytique

[*Calculatrices non autorisées*]

I – **Suites numériques**

[A] [5 pts] : *Soit* (u_n) la suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ *et* $u_0 = 9$. *avec* $f(x) = \dfrac{6x+4}{x+3}$

1°) Étudier le sens de variation et représenter graphiquement cette fonction sur [0 ; +∞ [
2°) Construire graphiquement les premiers termes de la suite (u_n) sur l'axe des abscisses.
3°) Montrer que la fonction f admet un point fixe sur l'intervalle [0 ; +∞ [
4°) Quelles conjectures on peut faire, d'après la figure, sur les propriétés de la suite (u_n) : sens de variation ? bornes ? Convergence?
5°) Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a : $4 \leq u_n \leq 9$.
6°) Démontrer par récurrence que (u_n) est décroissante.

[B] [3 pts] On pose $v_n = \dfrac{u_n - 4}{u_n + 1}$.

a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique :calculer sa raison et son 1er terme.
b) Exprimer v_n en fonction de n, et indiquer sa limite.
c) Exprimer u_n en fonction de v_n, en déduire la limite de (u_n).

II – **Trigonométrie**

[A] [2,5 pts] On pose

$$A = Cos^2\frac{\pi}{12} + Cos^2\frac{3\pi}{12} + Cos^2\frac{5\pi}{12} + Cos^2\frac{7\pi}{12}$$
$$B = Sin^2\frac{\pi}{12} + Sin^2\frac{3\pi}{12} + Sin^2\frac{5\pi}{12} + Sin^2\frac{7\pi}{12}$$

1°) Rappeler la formule de Cos(2*x*) en fonction de Cos *x* et de Sin *x*.
2°) Calculer A + B et A – B.
3°) En déduire A et B.

[B] [2 pts]: 1°) Calculer $Cos(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4})$ et $Sin(\frac{\pi}{12})$.

2°) En déduire la résolution dans l'intervalle]-π ; π] de l'équation :

$$(\sqrt{6} + \sqrt{2})Cos(x) + (\sqrt{6} - \sqrt{2})Sin(x) = 2$$

III– **Produit Scalaire et Géométrie analytique**

[A] [2,5 pts]] On donne les vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ tels que :

$$\|\vec{U}\| = 2\ ,\ \|\vec{V}\| = 3 \text{ et } \vec{U} \bullet \vec{V} = -3$$

1°) Déterminer la position relative de $\vec{U}$ et $\vec{V}$ et faire une figure.
2°) Calculer $(\vec{U} + \vec{V})^2$ et en déduire $\|\vec{U} + \vec{V}\|$.
3°) Construire le vecteur $3\vec{U} + 2\vec{V}$ et calculer sa norme.

[B] [2 pts] Étant donnés deux points fixes A et B distants de 5 cm, et I le milieu de [AB]

1°) Déterminer géométriquement et construire l'ensemble des points M du plan tels que
$$MA^2 + MB^2 = 30{,}5$$
2°) Déterminer géométriquement et construire l'ensemble des points M du plan tels que
$$MA^2 - MB^2 = 20$$

[C] [3 pts] Dans un repère orthonormé $[O;(\vec{i},\vec{j})]$ on donne les points A(-1 ;5) et B(2;1).

On note M un point du plan de coordonnées (*x;y*) dans ce repère.

1°) Calculer MA^2 et MB^2 en fonction de *x* et *y*.
2°) Déterminer l'équation et construire l'ensemble des points M du plan tels que $MA^2 + MB^2 = 30{,}5$
3°) Déterminer l'équation et construire l'ensemble des points M du plan tels que $MA^2 - MB^2 = 20$