jml@ecole-alsacienne.org
2006-2007

MATHÉMATIQUES - 1ère S2 $\boxed{\textbf{A}}$
Contrôle N°5 • 15 février. • 100 min.

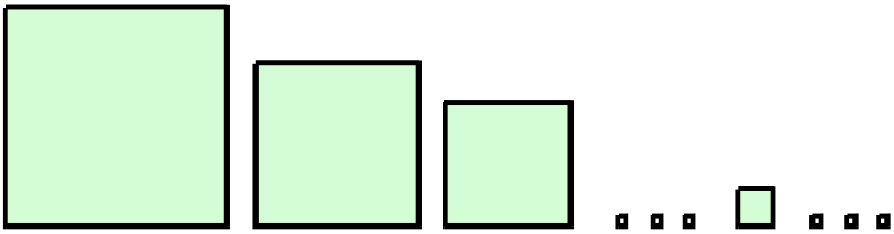
Fonctions Trigonométriques et Suites Numériques .

I- [6 pts] **Étude d'une fonction trigonométrique** :

Soit $f(x) = \sin 2x - 2\cos x + 1$

1. *Déterminer la période de la fonction f.*
2. *En déduire un intervalle d'étude pour f.*
3. *Résoudre l'équation $f(x) = 1$ (on rappelle que $\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x$.)*
4. *Montrer que $f(\pi/2 - x) + f(\pi/2 + x) = 2$*
5. *Que peut-on en déduire pour la courbe de f ?*
6. *Calculer $f'(x)$.*
7. *Etudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0 ; \pi]$.*
8. *En déduire les variations de f sur cet intervalle.*
9. *Tracer la courbe représentative de f sur l'intervalle $[-2\pi ; 2\pi]$ en prenant 3cm ou 3 carreaux pour π sur Ox et 2cm ou 2 carreaux pour unité sur Oy.*
10. *Montrer que le point $I(\pi/2 ; 1)$ est un point d'inflexion pour la courbe de f.*

II- [4 pts] **Étude d'une suite vraiment géométrique.**



On considère la suite de carrés ci-dessus dans laquelle chaque carré a un côté égal aux trois quarts du précédent. On appelle L_n la longueur du côté du carré de rang n, et A_n l'aire de ce carré. On pose $L_0 = 3$ cm. Calculer la limite de l'aire qui serait recouverte par l'ensemble de tous les carrés de la suite infinie ainsi construite.

III – [10 pts] **Étude de plusieurs suites numériques à partir d'une même fonction**:

On donne la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{5x+6}{x+4}$

1°) Etudier le sens de variation et représenter graphiquement cette fonction sur $[0 ; +\infty[$

2°) On pose $a_n = f(n)$.

a) *Représenter graphiquement les premiers termes de la suite (a_n).*
b) *Etudier le sens de variation de la suite (a_n).*
c) *Indiquer si la suite (a_n) est ou non bornée et si oui par quels nombres.*
d) *Déterminer la limite de la suite (a_n) en appliquant les théorèmes généraux.*

3°) On pose $b_{n+1} = f(b_n)$ et $b_0 = 10$.

a) *Représenter graphiquement les premiers termes de la suite (b_n) sur une nouvelle figure en utilisant la courbe représentative de f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$*
b) *Quelles conjectures peut-on faire d'après la figure quand au sens de variation, aux bornes, et à la convergence de (b_n) ?*
c) *Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a : $0 \leq b_n \leq 10$*
d) *Montrer par récurrence que (b_n) est décroissante*

4°) On pose $c_n = \dfrac{b_n - 3}{b_n + 2}$.

a) *Montrer que la suite (c_n) est géométrique :calculer sa raison et son 1er terme.*
b) *Exprimer c_n en fonction de n.*
c) *Exprimer b_n en fonction de c_n.*
d) *En déduire b_n en fonction de n.*
e) *Indiquer la limite de (c_n).*
f) *En déduire la limite de (b_n)*