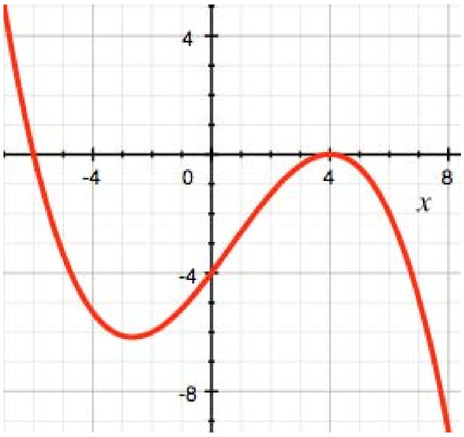
mcb/jml@ecole-alsacienne.org

Fonctions rationnelles et irrationnelles – Limites – Dérivées – Tangentes - Asymptotes – Courbes



I – [2 pts] Le graphique ci-contre représente une partie de la courbe d'une fonction *f* dérvable sur l'intervalle[-7 ; 8].

1°) D'après ce graphique, dresser le tableau du signe de la dérivée et des variations de la fonction *f*. Préciser les extrema et les intersections avec les axes.

2°) quelle conjecture peut-on émettre quant à l'existence et l'éventuelle valeur du nombre : $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(4+h)}{h}$?

II – [4 pts] Étude de la « fraction continue » $F(x)=1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}}}$

A l'aide des théorèmes généraux des opérations sur les limites, calculer les limites de la fraction *F(x)* lorsque x tend vers 0^+; 0^-; -1^+; -1^- ; $+\infty$; $-\infty$, et indiquer *sans démonstration* les résultats dans un tableau.

III - [2 pts] Calculer la limite en $-\infty$, et en $+\infty$, de $f(x)=\sqrt{x^2+x+4}-(x+2)$

IV- [9 pts] Soit *f* la fonction définie par $f(x)=\dfrac{x^3+8x^2+20x+16}{2(x+1)^2}$ et *(Cf)* la courbe représentative.

1°) Indiquer l'ensemble de définition Df sous forme d'intervalles, et calculer les limites aux bornes.

2°) Mettre f(x) sous la forme $ax+b+\dfrac{cx+d}{2(x+1)^2}$, (déterminer les constantes a, b, c, d).

3°) a) En déduire que *(Cf)* admet pour asymptote oblique la droite (Δ) d'équation $y=\dfrac{1}{2}x+3$

b) Montrer que *(Cf)* coupe (Δ) en un point I à distance finie et calculer les coordonnées de I.

c) Étudier la position de *(Cf)* par rapport à (Δ).

4°) Soit $P(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 12$. Montrer que P(x) = (x-2).Q(x) où Q(x) est un polynôme du 2^{nd} degré que l'on déterminera. Etudier le signe de P(x).

5°) a) Calculer la dérivée *f '(x)* et montrer que *f '(x)* peut se mettre sous la forme $\dfrac{P(x)}{2(x+1)^3}$

b) En déduire le signe de *f '(x)* puis dresser le tableau des variations et des limites de *f*.

6°) a) Calculer les coordonnées des extrema locaux.

b) Calculer *f(-2)* et toutes les intersections de (Cf) avec les axes de coordonnées.

7°) Écrire une équation de la tangente (T) au point d'abscisse x = - 4.

8°) Placer les asymptotes, la tangente (T) et tracer *(Cf)* dans un repère orthonormal (unité 1cm ou 1 carreau).

V- [4 pts] On considère, dans un repère orthonormal, l'hyperbole équilatère ($\mathcal{H}$) d'équation $y=\dfrac{1}{x}$ et les trois points A(1;-1), B(1;2), et C(2;0).

1°) Tracer ($\mathcal{H}$) et placer les points A, B, C. Combien peut-on tracer de tangentes à ($\mathcal{H}$) à partir de chacun des points A, B, C ?

2°) Soit M(x;y) un point du plan, et P le point d'abscisse *x = a* de ($\mathcal{H}$) (a ≠ 0). Soit (Δ) la tangente à (H) au point P. Démontrer que M ∈ (Δ) si et seulement si (⇔) on a la relation $a^2y - 2a + x = 0$.

3°) Déterminer alors le nombre de tangentes passant par chacun des points A, B, C et tracer ces tangentes.

mcb/jml@ecole-alsacienne.org
2006-2007

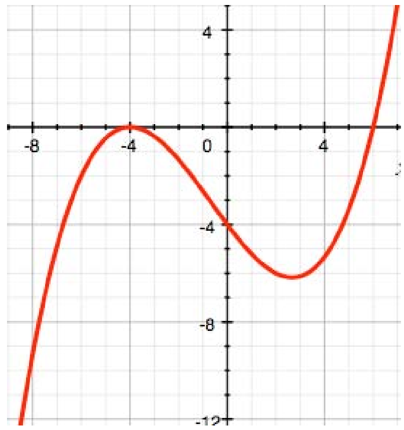
MATHÉMATIQUES - $1^{\text{ères}}$ S_2 & S_3 $\boxed{\textbf{B}}$
Contrôle Commun • 14 déc • 100 min.

Fonctions rationnelles et irrationnelles – Limites – Dérivées – Tangentes - Asymptotes – Courbes

I – [2 pts] Le graphique ci-contre représente une partie de la courbe d'une *f* dérivable sur l'intervalle[-9 ; 7].

1°) D'après ce graphique, dresser le tableau du signe de la dérivée et des variations de la fonction *f*. Préciser les extrema et les intersections avec les axes.

2°) quelle conjecture peut-on émettre quant à l'existence et l'éventuelle valeur du nombre : $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(-4+h)}{h}$?



II – [3 pts] Étude de la « fraction continue » $F(x)=1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x}}}}$

A l'aide des théorèmes généraux des opérations sur les limites, calculer les limites de la fraction *F(x)* lorsque x tend vers 0^+; 0^-; 1^+ ; 1^- ; $+\infty$; $-\infty$, et indiquer *sans démonstration* les résultats dans un tableau.

III - [2 pts] Calculer la limite en $-\infty$, et en $+\infty$, de $f(x)=\sqrt{x^2-x+4}-(x-2)$

IV- [9 pts] Soit *f* la fonction définie par $f(x)=\dfrac{x^3-8x^2+20x-16}{2(x-1)^2}$ et (C_f) la courbe représentative.

1°) Indiquer l'ensemble de définition D*f* sous forme d'intervalles, et calculer les limites aux bornes des intervalles.

2°) Mettre *f(x)* sous la forme $ax+b+\dfrac{cx+d}{2(x-1)^2}$, (déterminer les constantes a, b, c, d).

3°) a) En déduire que (C_f) admet pour asymptote oblique la droite (Δ) d'équation $y=\dfrac{1}{2}x-3$

b) Montrer que (C_f) coupe (Δ) en un point I à distance finie et calculer les coordonnées de I.
c) Étudier la position de (C_f) par rapport à (Δ).

4°) Soit $P(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 12$. Montrer que P(x) = (x-2).Q(x) où Q(x) est un polynôme du 2^{nd} degré que l'on déterminera. Etudier le signe de P(x).

5°) a) Calculer la dérivée *f '(x)* et montrer que *f '(x)* peut se mettre sous la forme $\dfrac{P(x)}{2(x-1)^3}$

b) En déduire le signe de *f '(x)* puis dresser le tableau des variations et des limites de *f*.

6°) a) Calculer les coordonnées des extrema locaux.
b) Calculer *f(2)* et en déduire toutes les intersections de (C_f) avec les axes de coordonnées.

7°) Écrire une équation de la tangente (T) au point d'abscisse x = 4.

8°) Placer les asymptotes, la tangente (T) et tracer (C_f) dans un repère orthonormal (unité 1cm ou 1 carreau, sur une page entière).

V- [4 pts] On considère, dans un repère orthonormal, l'hyperbole équilatère $(\mathcal{H})$ d'équation $y=\dfrac{1}{x}$ et les trois points A(1;-1), B(1;2), et C(2;0).

1°) Tracer $(\mathcal{H})$ et placer les points A, B, C. Combien peut-on tracer de tangentes à $(\mathcal{H})$ à partir de chacun des points A, B, C ?

2°) Soit M(x ;y) un point du plan, et P le point d'abscisse $x = a$ de $(\mathcal{H})$ $(a \neq 0)$. Soit (Δ) la tangente à $(\mathcal{H})$ au point P. Démontrer que $M \in (\Delta)$ si et seulement si $(\Leftrightarrow)$ on a la relation $a^2y - 2a + x = 0$.

3°) Déterminer alors le nombre de tangentes passant par chacun des points A, B, C, et tracer ces tangentes.