Tout ce que vous avez toujours voulu savoir sur les Suites Numériques sans jamais oser le demander…

I - Soit f_a la fonction définie, pour tout a >0, par $f_a(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$.

A- Étude de la fonction f_a :

1°) Étudier la parité, les limites aux bornes de l'ensemble de définition, les asymptotes.

2°) Calculer la dérivée de f_a et en déduire les variations.

3°) Montrer que f_a admet un pont fixe unique sur $\mathbb{R}_+^*$, c'est à dire qu'il existe un et un seul nombre $u > 0$ tel que $f_a(u) = u$.

4°) Courbe représentative de f_a . On se contentera de la restriction de f_a à $\mathbb{R}_+^*$ avec 2cm pour unité graphique et on pourra prendre par exemple a = 5.

B- Étude de la suite récurrente associée à f_a par $u_{n+1} = f_a(u_n)$ et $u_0 = b > \sqrt{a}$.

1°) A l'aide de la courbe précédente représenter graphiquement les premiers termes de la suite (u_n). On pourra prendre pour cela $u_0= 5$. Quelles conjectures peut-on faire sur le comportement de la suite (u_n) ?

2°) Montrer, par récurrence, que pour tout n, on a $u_n > \sqrt{a}$.

3°) Montrer, par récurrence, que (u_n) est décroissante.

4°) Montrer que si (u_n) admet une limite u cette limite ne peut être que le point fixe de la fonction f_a déterminé en I-3°).

C- Recherche de la limite de (u_n) à l'aide de la suite auxiliaire

$$v_n = \frac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}}$$

1°) Démontrer, que pour tout n, on a $v_{n+1} = (v_n)^2$.

2°) En déduire, par récurrence, que pour tout n, on a $v_n = (v_0)^{2^n}$.

3°) Montrer, par récurrence, que pour tout n, on a $v_n \leq (v_0)^n$.

4°) En déduire la limite de (v_n).

5°) Exprimer u_n en fonction de v_n , en déduire la limite de u_n.

6°) Montrer comment l'étude précédente permet d'obtenir une majoration de $(u_n - \sqrt{5})$ et donc une valeur approchée de $\sqrt{5}$, à moins de 10^{-4} près, à l'aide de très peu de calculs manuels (prendre $u_0 = 2{,}5$).

II - Soit (u_n) la suite définie par $u_1 = 1$ et $u_n = \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{u_{n-1}}}$.

1°) Calculer u_2 , u_3, u_4.

2°) Démontrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$, on a $u_n = \frac{1}{n}$.

3°) Indiquer les fonctions f et g telles que $u_n = f(u_{n-1})$ et $u_n = g(n)$ et représenter graphiquement sur 2 figures séparées la construction des premiers termes de la suite(u_n) dans chacun des deux modes de définition.

4°) Démontrer que (u_n) est décroissante et indiquer sa limite.

5°) On considère la suite (v_n) définie par $v_n = f(n)$.Démontrer que (v_n) est croissante et a pour limite 1.

6°) On pose maintenant $w_{n+1} = g(w_n)$ et $w_0 = 2$. Représenter graphiquement la suite (w_n). Est-elle croissante ? décroissante ? bornée ? a-t-elle une limite ?

III- Soit $f(x) = \sqrt{6 + x}$ et la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = f(u_n)$, $u_0 = 10$.

1°) Représenter graphiquement la fonction f et les premiers termes de la suite (u_n).

2°) Montrer que f admet un point fixe α, et que si (u_n) a une limite, celle-ci ne peut-être que ce point fixe.

3°) Démontrer de deux manières que (u_n) est minorée par 3 :

a) par récurrence sur n.

b) en utilisant le fait que f est croissante, f(3) = 3 ,et $u_n = f^{(n)}(u_0)$ avec $f^{(n)} = f \circ f \circ f \circ \ldots \circ f$ (n fois).

4°) Démontrer de deux manières que (u_n) est décroissante :

a) en étudiant le signe de la fonction $g(x) = f(x) - x$, étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$.

b) en utilisant le sens de variation de f, montrer que $u_{n+1} - u_n$ est du même signe que $u_n - u_{n-1}$.

5°) a) Montrer directement que pour tout n on a l'inégalité $|u_n - 3| \leq \frac{1}{3} |u_{n-1} - 3|$.

6°) En déduire qu'il existe une suite géométrique (v_n) de limite 0, dont on donnera la raison et le premier terme, telle que pour tout n on ait $|u_n - 3| \leq v_n$. Conclusion ? (*noncepadlatarte*)