1ère S5 - 7 AVRIL 2005
Compléments d'Exercices de préparation du CONT. N°7.

[Source : Terracher / Hachette 1995 - 1ère S ANALYSE (t.I) p.198. N°93.]

93 **Trajectoire d'un projectile**

Si l'on fait abstraction des frottements et de la résistance de l'air, la trajectoire (courbe **balistique**) d'un projectile lancé d'un point O avec une vitesse initiale v suivant un angle d'inclinaison α par rapport à l'horizontale $\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$ est la parabole $\mathcal{T}_\alpha$ d'équation :

$$y=\frac{-g}{2v^2\cos^2\alpha}x^2+(\tan\alpha)x,$$

où g est l'accélération de la pesanteur ($g=9{,}81\ \text{m/s}^2$).

Dans ce qui suit, la vitesse v est fixée et on note k la constante positive : $k=\frac{g}{v^2}$. La parabole $\mathcal{T}_\alpha$ a alors pour équation $y=t_\alpha(x)$, avec :

$$t_\alpha(x)=\frac{-k}{2\cos^2\alpha}x^2+(\tan\alpha)x \quad (k>0 \text{ fixé}).$$

1° *La flèche*

La flèche est l'altitude maximale atteinte par le projectile.

a) Exprimer la flèche $h(\alpha)$ pour $\alpha\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

b) Montrer que $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} h(x)=\frac{1}{2k}$.

(On montre[1], en mécanique, que lorsque le projectile est lancé verticalement, son altitude maximale est $\frac{1}{2k}=\frac{v^2}{2g}$.)

2° *La portée*

La portée $p(\alpha)$ est la distance O au point d'impact avec l'horizontale.

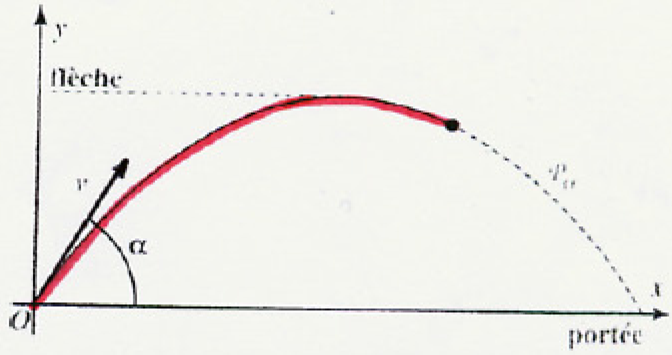
a) Calculer $p(\alpha)$.
(*Rappel :* $2\sin\alpha\cos\alpha=\sin 2\alpha$.)

b) Montrer que la portée maximale est $\frac{1}{k}$ et qu'elle est atteinte lorsque $\alpha=\frac{\pi}{4}$.

c) Vérifier que $p\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=p(\alpha)$.

Comment interpréter ce résultat?

(1) On montre, mais on évite les vérifications expérimentales.



3° *La parabole de sûreté*

Soit f la fonction $x\mapsto-\frac{k}{2}x^2+\frac{1}{2k}$.

a) Vérifier que $y=f(x)$ est l'équation de la parabole Γ d'axe (Oy), de sommet $H\left(0,\frac{1}{2k}\right)$ (point de flèche maximale) et passant par le point $P\left(\frac{1}{k},0\right)$ (point de portée maximale).

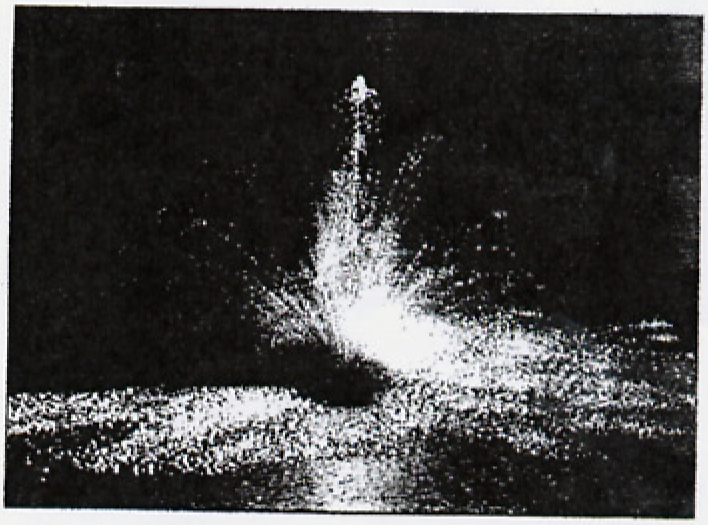
b) Montrer que :

$$f(x)-t_\alpha(x)=\frac{k}{2}(\tan^2\alpha)x^2-(\tan\alpha)x+\frac{1}{2k}.$$

En déduire le tableau de variations du trinôme $f(x)-t_\alpha(x)$ sur $[0,+\infty[$.

c) Établir les résultats suivants (valables sur l'intervalle $[0,+\infty[$) :
— la parabole Γ est au-dessus de toutes les paraboles $\mathcal{T}_\alpha$;
— Γ et $\mathcal{T}_\alpha$ ont un seul point en commun, où elles admettent alors la même tangente.

INFO La parabole Γ est appelée *parabole de sûreté :* tout point situé au-dessus de Γ ne peut être atteint par un projectile, quel que soit l'angle d'inclinaison α. Dans l'espace, cette parabole engendre une surface de révolution appelée *paraboloïde de sûreté*. La photographie ci-après illustre de façon plus paisible et plausible le *paraboloïde de sécurité :*
— plus paisible : cela va de soi ;
— plus plausible, car la trajectoire réelle d'un obus diffère notablement de sa trajectoire théorique en raison de la résistance de l'air.



La trajectoire de chaque goutte de ce jet d'eau est une parabole.
L'ensemble des trajectoires dessine un paraboloïde.