

Équations et Fonctions Trigonométriques

I - Soient $u(x) = \cos x$; $v(x) = \frac{2x - 1}{2x + 1}$; et la fonction composée $f(x) = v[u(x)] = \frac{2 \cos x - 1}{2 \cos x + 1}$.

- 1°) Indiquer les variations des fonctions u et v et leurs courbes représentatives.
- 2°) Étudier la parité et la périodicité de f . En déduire l'intervalle d'étude I . Préciser l'ensemble de définition de f .
- 3°) Dresser le tableau des variations, des extrema et des limites de f à l'aide des variations de u et v dans les intervalles appropriés.
- 4°) Calculer la dérivée de f , étudier son signe sur l'intervalle I , et retrouver les variations les extrema et les limites obtenues dans le tableau précédent.
- 5°) Déterminer les points d'intersection avec les axes et construire la courbe de f sur l'intervalle I dans un repère orthonormé (unités : 6 carreaux = π).

II - On donne la fonction f définie par : $f(x) = \cos 2x - 2 \sin x + \frac{1}{2}$

- 1°) Indiquer la période de f , étudier sa parité ; en déduire l'intervalle I d'étude de f .
- 2°) Calculer $f'(x)$ et étudier son signe sur I , puis en déduire les variations de f sur I .
- 3°) a) Résoudre l'équation $f(x) = 0$ dans I .
b) Déterminer et tracer la tangente à la courbe aux points d'abscisse $0, \pi, 2\pi$.
c) Tracer la courbe et les tangentes aux points particuliers de f dans un repère orthogonal ayant des mesures d'unité telles que $\pi = 6$ unités sur $x'Ox$, et $1 = 2$ unités sur $y'Oy$ (on prendra 1 cm ou un carreau pour unité).
d) Montrer que la courbe admet un axe de symétrie d'équation $x = \frac{\pi}{2}$.

III - Étude de la fonction trigonométrique f définie par: $f(x) = \frac{1}{2 \cos x + 1}$

- 1°) Déterminer son ensemble de définition D . Étudier la parité et la périodicité de f ; en déduire un intervalle d'étude I .
- 2°) Calculer $f'(x)$ et étudier son signe sur l'intervalle I .
- 3°) Dresser le tableau des variations, des extrema et des limites de f sur I .
- 4°) Déterminer l'équation de la tangente à (C_f) au point d'abscisse $x = \frac{\pi}{2}$.
- 5°) Tracer la courbe (C_f) sur l'intervalle $[-2\pi ; 2\pi]$; prendre 3 carreaux ou 3 cm pour π .

IV - On donne les trois fonctions suivantes :

$$u(x) = \cos 2x + 2 \cos x + 1 ; \quad v(x) = \sin 2x - 2 \sin x ; \quad f(x) = \frac{\cos 2x + 2 \cos x + 1}{\sin 2x - 2 \sin x}$$

- 1°) Factoriser $u(x)$, résoudre l'équation $u(x) = 0$; calculer et factoriser $u'(x)$
- 2°) Factoriser $v(x)$, résoudre l'équation $v(x) = 0$; calculer et factoriser $v'(x)$

3°) Montrer que pour $x \neq \pi$, $f(x)$ peut se mettre sous la forme réduite $f_1(x) = \frac{\cos x \cdot \cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2} (\cos x - 1)}$

4°) Etude de la fonction f (justifier les réponses) :

- a) Comparer l'ensemble de définition de f et de f_1 .
Dans toute la suite du problème on supposera $f(\pi) = f_1(\pi) = 0$.
- b) Étudier la parité et la périodicité de f , en déduire un intervalle d'étude I .
- c) Montrer que $f'(x) = \frac{2 \cos x + 1}{(\cos x - 1)^2}$ (pour $x \neq k\pi$), déterminer ses zéros et son signe.
- d) Dresser le tableau des variations et des limites de f sur I .
- e) Indiquer les asymptotes éventuelles et la tangente au point d'abscisse $x = \pi$
- f) Tracer la courbe de f sur l'intervalle $[-2\pi ; 2\pi]$ en indiquant la construction à partir de I ; prendre 3 carreaux ou 3 cm pour π .